数学 1 及び演習　ノート 12

3.4　連立 1 次方程式

掃き出し法

例：次の連立 1 次方程式を掃き出し法によって解け.

$$(1)\ \begin{cases} x - 2y = 3 \\ -x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - 8y + 4z = -1 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} 3x - y = -2 \\ 6x - 2y = a \end{cases}$$

解答：

- 連立 1 次方程式の解に現れる任意定数の個数を**解の自由度**という.
- 連立 1 次方程式の解の有無と解の自由度が次の定理から分かる.

定理 3.2

n 元連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に対して次が成立する.

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つ $\Leftrightarrow \mathrm{rank}\ A = \mathrm{rank}\ (A\ b)$

(2) （解を持つとき）解の自由度 $= n$（変数の数）$- \mathrm{rank}\ A$

例：次の連立 1 次方程式が解をもつように a の値を求めて，実際に解け．

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x + y - 3z = -6 \\ 3x + 4y - 2z = a \end{cases}$$

解答：

同次連立 1 次方程式

- $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の形で書ける連立 1 次方程式を**同次連立 1 次方程式**という．
- 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に対して $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を**自明な解**という．
- 同次連立 1 次方程式が自明ではない解を持つための必要十分条件がいくつか知られている（次の定理 3.3）．

定理 3.3

$m \times n$ 行列 A に対して，次の 2 つは同値である．

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が自明でない解を持つ

(2) $\mathrm{rank}\ A < n$

A が正方行列 $(m = n)$ ならば，さらに次の 2 つが同値である．

(3) $|A| = 0$

(4) A は正則でない

定理 3.3 の証明：

3.5　行列と行列式の変形に関する注意

- 行列式の変形と行列の基本変形との違いに注意.

行列の基本変形	行列式の変形で使えるかどうか
2 つの行（列）を入れ替える	行列式では $\pm$ が入れ替わる
ある行（列）を定数倍（$\neq 0$）する	行列式では $\dfrac{1}{\text{定数倍}}$ が前にかかる
ある行（列）に他の行（列）の定数倍を加える	行列式でも可能

- 行列の行基本変形と列基本変形の使用方法に注意.

	掃き出し法の計算	ランクの計算	ノート 9 の逆行列の計算
行基本変形	○	○	○
列基本変形	×	○	×