ノート1：線形空間

1-1. 線形空間の定義

K を実数の全体 $\boldsymbol{R}$ または複素数の全体 $\boldsymbol{C}$ とする．
空でない集合 V に対して，次の各条件（**線形空間の公理**という）が満たされるならば，V を K 上の**線形空間**または**ベクトル空間**という．

(I) V の任意の2元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して，**和** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in V$ が定義されていて，教科書 P.71 の (1)–(4) を満たす．

(II) V の任意の元 $\boldsymbol{a}$ と K の任意の元 λ に対して，**スカラー倍** $\lambda\boldsymbol{a} \in V$ が定義されていて，教科書 P.71 の (5)–(8) を満たす．

線形空間 V の元は**ベクトル**，K の元は**スカラー**とよばれる．
$K = \boldsymbol{R}$ のとき V を**実線形空間**，$K = \boldsymbol{C}$ のとき V を**複素線形空間**という．

例 1-1：3項列ベクトルの全体 $\boldsymbol{R}^3$ において，和と実数倍をそれぞれ，

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$$

と定義すると，$\boldsymbol{R}^3$ は実線形空間になる．同様にして n 項列ベクトルの全体 $\boldsymbol{R}^n$ は実線形空間になり，また複素数からなる n 項列ベクトル全体 $\boldsymbol{C}^n$ は複素線形空間になる．

注 1-1：線形空間の公理は，$\boldsymbol{R}^n$ が持ついくつかの性質を抜き出し，抽象化したもの．

例 1-2：実係数の多項式全体は $\boldsymbol{R}$ 上の線形空間になる．

例 1-3：$\boldsymbol{R}$ 上で定義された実数値関数全体からなる集合を F とする．このとき，$f, g \in F$, $c \in \boldsymbol{R}$ に対し，$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(cf)(x) = cf(x)$ によって和とスカラー倍を定義すると，F は $\boldsymbol{R}$ 上の線形空間になる．

注 1-2：零ベクトルはただ1つで，任意の $\lambda \in K$ に対し，$\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

注 1-3：$\boldsymbol{a} \in V$ に対して，逆ベクトル $-\boldsymbol{a}$ はただ1つで，$-\boldsymbol{a} = (-1)\boldsymbol{a}$.

補足 1-1：$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$ を $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ とかく．

1-2. 部分空間

K 上の線形空間 V と $W \subseteq V$ に対し，

(i) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$

(ii) $\lambda \in K, \boldsymbol{a} \in W \Rightarrow \lambda \boldsymbol{a} \in W$

が共に成り立つとき，W を V の**部分空間**という．

注 1-4：W が線形空間 V の部分空間ならば W も線形空間．

注 1-5：$\{\boldsymbol{0}\}, V$ は部分空間．

補足 1-2：(i) かつ (ii) の条件は次の (iii) と同値．

(iii) $\lambda, \mu \in K, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W \Rightarrow \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} \in W$

例 1-3：$W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + 2y - z = 0\}$ が $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間であるかどうか調べよ．

解答：

例 1-4：$W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = 1\}$ が $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間であるかどうか調べよ．

解答：

補足 1-3：$\boldsymbol{R}^3$ の部分空間は原点を通る平面，直線，原点のみ，のいずれか．

例 1-5：$m \times n$ 行列 A に対し，$W = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ が $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間であることを示せ．

解答：