ノート 2：線形独立，線形従属

2-1．線形結合

K 上の線形空間 V において，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in V$ に対して，

$$\boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n,\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K)$$

となるベクトル $\boldsymbol{a}$ は，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の K 上の**線形結合（1 次結合）**で表せるという．
$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の K 上の線形結合全体からなる集合を，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ **で生成される**，もしくは $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ **で張られる**部分空間といい，$< \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n >$ で表す．すなわち，

$$< \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n > = \{\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n \ : \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K\}.$$

このとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ をこの部分空間の**生成元**という．

注 2-1：$< \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n >$ は部分空間（前回提出課題 問 1-4 参照）

補足 2-1：部分空間 W に対し，$W = < \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n >$ となる $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を W の生成元という．

例 2-1：$\boldsymbol{R}^3$ の部分空間 $W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + 2y - z = 0\}$ の生成元を求めよ．

解答：

2-2．線形独立（1 次独立）

K 上の線形空間 V において，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in V$ が，

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0},\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in K) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$$

を満たすとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は**線形独立（1 次独立）**であるという．

線形独立ではないとき（つまり，ある $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ に対し，$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ となるとき），$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は**線形従属（1 次従属）**であるという．

例 2-2：$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^3$ を $\boldsymbol{R}^3$ での線形独立なベクトルとする．このとき，$< \boldsymbol{a} >, < \boldsymbol{b} >, < \boldsymbol{c} >$ は原点を通る直線，$< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >, < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} >, < \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} >$ は原点を通る平面，$< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} > = \boldsymbol{R}^3$ となる．

例 2-3：$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$ を $\boldsymbol{R}^3$ での線形独立なベクトルとする．このとき，$\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^3$ が平面 $< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >$ 上にあれば $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は線形従属，そうでなければ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は線形独立である．

例 2-4：$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が線形独立で，$< \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 >= \boldsymbol{R}^3$ となることを示せ．

解答：

例 2-5：$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が線形従属であることを示せ．

解答：

一般に，いくつかの $\boldsymbol{R}^n$ のベクトルが線形独立であるかどうかを判別するのに，次の定理が役に立つ．

> 定理 2-1（教科書 P.75 定理 4.2）
> $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，$A = (\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_m)$ とすると，
> $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が線形独立 $\Longleftrightarrow$ rank $A = m$
> 特に，$m = n$ のとき，
> $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形独立 $\Longleftrightarrow$ A が正則

定理 2-1 の証明：

注 2-2：定理 2-1 を用いれば例 2-5 の $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は，rank $(\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{a}_3) = 2$ より，線形従属であることが分かる．