ノート 3：基底と次元

3-1. 基底と次元

線形空間 V と $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ に対し，

(i) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は線形独立

(ii) $V = < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n >$

となるとき，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の**基底**，n を V の**次元**といい，$\dim V = n$ とかく．
また，このとき，V を n **次元線形（ベクトル）空間**という．

補足 3-1：$\dim \{\boldsymbol{0}\} = 0$ と定める．

補足 3-2 : 基底となるベクトルの個数が有限か無限かに応じて，V は**有限次元**，**無限次元**であるという．授業では有限次元の線形空間を扱う．

例 3-1 : 例 2-4 における $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ は基底となる（**標準基底**という）．よって $\dim \boldsymbol{R}^3 = 3$．
同様にして，$\dim \boldsymbol{R}^n = n$ が分かる．

例 3-2 : 教科書 P.102, [A] 1. (3)（前回提出課題 問 2-1）における 3 個のベクトルも $\boldsymbol{R}^3$ の基底となる．

例 3-1, 3-2 のように，基底の取り方は何通りもあるが，基底を構成するベクトルの個数は一定であることが，次の定理（証明略）から分かる（よって $\dim V$ が定義できる）．

> 定理 3-1
> 線形空間 V が n 個のベクトルからなる基底をもつならば，
> $n+1$ 個以上のベクトルは線形従属となる．

基底に関する議論をする際に，次の定理が役に立つ．

> 定理 3-2（教科書 P.75 定理 4.1）
> 線形空間 V，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b} \in V$ に対し，
> $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が線形独立，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}$ が線形従属ならば，
> $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の線形結合で表せる．

定理 3-2 の証明：

補足 3-3 : $V = < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n >$ のとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ からいくつかベクトルを選んで V の基底にすることができる.

補足 3-3 の証明：

定理 3-2 は次のように書くこともできる.

系 3-1
線形空間 V と $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b} \in V$ に対し，
$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が線形独立で，$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の線形結合で表せないならば，
$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}$ は線形独立.

次の定理は（証明等で）都合のよい基底を構成する際に役に立つ.

定理 3-3（教科書 P.76 定理 4.3）
線形空間 V と V の部分空間 W に対し，
W の基底にいくつかのベクトルを加えることで，V の基底が得られる.

定理 3-3 の証明：

例 3-3：$W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + 2y - z = 0\}$ の次元と基底を求めよ．

解答：

例 3-4：$W_1 = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$, $W_2 = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$ に対して，W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ の次元と基底をそれぞれ求めよ．

解答：