ノート 4：線形写像 (1)

4-1. 写像

f を X から Y への写像とする．

1. $A \subseteq X$ に対し，$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ を f による A の**像**という．
2. $B \subseteq Y$ に対し，$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ を f による B の**逆像**という．
3. $y \in Y$ に対し，$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ を f による y の**逆像**という．
4. $f(X) = Y$ のとき f は**全射**であるという（**上への写像**ともいう）．
5. 任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し，$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ となるとき，f は**単射**であるという（**1 対 1 の写像**ともいう）．(対偶をとると，$f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$）
6. f が全射かつ単射であるとき，f は**全単射**であるという．
7. f が全単射のとき，f^{-1} によって定まる Y から X への写像を f の**逆写像**といい，f^{-1} の記号をそのまま用いて表す．
8. f を U から V，g を V から W への写像とする．このとき $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ で定義される V から W への写像を f と g の**合成写像**という．

注 4-1：f が V から W への写像であることを $f : V \to W$ で表すことがある．

例 4-1：上記の 1–8 の図

例 4-2：n 次正方行列 A に対し，A が正則ならば，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義される $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^n$ への写像は全単射であることを示せ.

解答：

4-2. 線形写像

K 上の線形空間 V, W に対し，V から W への写像 f が

(i) 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対し，$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$

(ii) 任意の $\lambda \in K, \boldsymbol{a} \in V$ に対し，$f(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda f(\boldsymbol{a})$

を満たすとき，f を V から W への**線形写像**という.

補足 4-1 : 特に $V = W$ のとき，f を V 上の**線形変換**という.

補足 4-2 : 任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対し，$f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$ となる f を V 上の**恒等変換**という.

補足 4-3 : V から W への線形写像 f が全単射のとき，f を**同型写像**という.

補足 4-4 : V から W への同型写像が存在するとき，V と W は**互いに同型**であるといい，$V \cong W$ で表す.

例 4-3 : $m \times n$ 行列 A に対し，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義される $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^m$ への写像は線形写像.（このとき，f を A **によって表される線形写像**という）

例 4-4 : $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3x-y \\ y+1 \end{pmatrix}$ で定義される $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像は線形写像ではないことを示せ.
解答：

例 4-5 : $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^m$ への線形写像 f は，ある $m \times n$ 行列 A によって表すことができることを示せ.
解答：