

ノート 5 : 線形写像 (2)

5-1. 次元定理とその応用 (注 : 教科書には書かれていないが役に立つので追加)

次の定理は次元定理とよばれ, 多くの応用がある.

定理 5-1 (次元定理)

線形空間 V, W と, 線形写像 $f: V \rightarrow W$ に対して,
 $\dim V = \dim f(V) + \dim (\text{Ker } f)$ が成り立つ.

定理 5-1 から次の定理が得られる.

定理 5-2

f を $m \times n$ 行列 A によって表される $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像とする.
このとき, $\dim f(\mathbf{R}^n) = \text{rank } A$ となる.

定理 5-2 の証明 :

定理 5-2 から次の定理が得られる.

定理 5-3

$m \times n$ 行列 $A = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n)$ に対し,
 $\dim \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle = \text{rank } A$ となる.

定理 5-3 の証明 :

$\text{rank } A = \text{rank } {}^t A$ であることと,

$\dim \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle = A$ の線形独立な列ベクトルの最大数 (補足 3-3 の証明を参照)
であることより, 次の定理が得られる. (定理 2-1 の一般化)

定理 5-4

行列 A に対し,

$\text{rank } A = A$ の線形独立な列ベクトルの最大数 $= A$ の線形独立な行ベクトルの最大数.

例 5-1 : $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ の次元と基底を調べよ.

解答 :