ノート8：内積

ここから先は線形空間として主に $\boldsymbol{R}^n$ または $\boldsymbol{C}^n$ を扱う．

8-1．内積

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**内積**という．

補足 8-1：内積の性質について教科書 P.91 定理 4.6 が成り立つ．

補足 8-2：一般の $\boldsymbol{R}$ 上の線形空間では定理 4.6 を満たす 2 項演算を内積という．

補足 8-3：$\boldsymbol{C}^n$ においては，教科書 P.107 [B] 11 で内積を定義する．

補足 8-4：$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, {}^tA\boldsymbol{y})$ が成り立つ．

$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ とかき，$\boldsymbol{a}$ の**大きさ**，**長さ**，**ノルム**という．特に $\|\boldsymbol{a}\| = 1$ のとき，$\boldsymbol{a}$ を**単位ベクトル**という．ノルムは次の性質をもつ．

1. $\|\boldsymbol{a}\| \geq 0$ (ただし，$\|\boldsymbol{a}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$)
2. $c \in \boldsymbol{R}$ に対し，$\|c\boldsymbol{a}\| = |c|\|\boldsymbol{a}\|$
3. $\|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ が成り立つ（**シュヴァルツの不等式**と呼ばれる）
4. $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$ (**三角不等式**と呼ばれる)

8-2．正規直交基底

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交**するといい，$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ で表す．
$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in \boldsymbol{R}^n$ に対し，$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, r)$ となるとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ を**正規直交系**であるという．正規直交系である基底を**正規直交基底**という．

注 8-1：$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ が正規直交系 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は全て単位ベクトルで互いに直交

注 8-2：$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ が正規直交系 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は線形独立

例 8-1：$\boldsymbol{R}^3$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ は正規直交基底．

8-3. グラムシュミットの直交化法

グラムシュミットの直交化法：線形独立なベクトルの組から正規直交系を構成する方法

例 8-2：$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ から正規直交基底を構成せよ.

解答：

例 8-3：$\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ から正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ を構成する.

方法：

補足 8-5：例 8-3 と同様にして，$\boldsymbol{R}^n$ の線形独立なベクトルの組から正規直交系を構成することができる（教科書 P.96 参照）.

> 定理 8-1（教科書 P.98 定理 4.8）
> $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \boldsymbol{R}^n$ に対し，
> $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ が $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基底 $\Leftrightarrow A = (\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_n)$ は直行行列

定理 8-1 の証明：