

ノート 9 : 固有値と固有ベクトル

9-1. 固有値と固有ベクトル

n 次正方行列 A に対し, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ($\Leftrightarrow (\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$) となるような, ある $\lambda \in \mathbf{C}$ と $\mathbf{0}$ ではない $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ が存在するとき, λ を A の固有値, $\mathbf{x}$ を固有値 λ に対する A の固有ベクトルという.

例 9-1 : $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し, $A\mathbf{x} = -2\mathbf{x}$. よって -2 は A の固有値, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 -2 に対する A の固有ベクトル.

補足 9-1 : λ が A の固有値 $\Leftrightarrow (\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が自明でない解をもつ $\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$

補足 9-1 より, $|\lambda E - A| = 0$ の解 λ が A の固有値となることが分かる. $F_A(\lambda) = |\lambda E - A|$ を A の固有多項式, $F_A(\lambda) = 0$ を A の固有方程式という. $F_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$ と表したとき, n_i を λ_i の重複度という.

例 9-2 : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求める.

方法 :

手順 1 : $|\lambda E - A| = 0$ を λ について解く.

手順 2 : 手順 1 で求めた λ に対して, $(\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を $\mathbf{x}$ について解く.

注 9-1 : この授業では, λ に対する固有ベクトルを求めるときは, $(\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解全体からなる部分空間の基底を 1 つ求めることにする.

定理 9-1 (教科書 P.112 定理 5.2)

$B = P^{-1}AP$ に対し, $F_B(\lambda) = F_A(\lambda)$ となる.

定理 9-1 の証明 :

例 9-3 : 定理 9-1 より, A の固有値と $P^{-1}AP$ の固有値は等しいことが分かる. 例えば,
 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ のとき, A の固有値は $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ となる.

注 9-2 : A の固有ベクトルと $P^{-1}AP$ の固有ベクトルは等しいとは限らないことに注意.

定理 9-2 (教科書 P.113 定理 5.3)

相異なる固有値に対する固有ベクトルの組は線形独立.

定理 9-2 の証明 :