

ノート 10：行列の対角化

10-1. 行列の対角化

n 次正方行列 A に対して、 $P^{-1}AP$ が対角行列になるようなある n 次正則行列 P が存在するとき、 A は（ P により）対角化可能であるという。

補足 10-1 : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ のとき、 A の固有値は $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ となる

（定理 9-1 参照）。

定理 10-1（教科書 P.114 定理 5.4）

n 次正方行列 A に対し、

A が対角化可能 $\Leftrightarrow n$ 個の線形独立な A の固有ベクトルが存在する。

定理 10-1 の証明：

$\Rightarrow$ の証明：

$\Leftarrow$ の証明：

次の方法で対角化可能であるかどうかを調べることができる。

定理 10-2 (教科書には書かれていない)

n 次正方行列 A に対し, $F_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$ とする.

このとき, $W_i = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : A\mathbf{x} = \lambda_i\mathbf{x}\} \ (1 \leq i \leq r)$ とおくと,

A が対角化可能 $\Leftrightarrow \dim W_i = n_i \ (1 \leq \forall i \leq r)$.

補足 10-2 : $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$ を A の固有値 λ に対する固有空間という.

補足 10-3 : 一般に, $1 \leq \dim W_i \leq n_i$ であることが知られている.

対角化の方法 : 定理 10-1 の証明と定理 10-2 から対角化の手順が分かる.

手順 1 : A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ を求める

手順 2 : λ_i に対する A の固有ベクトル $\mathbf{p}_{i,1}, \mathbf{p}_{i,2}, \dots, \mathbf{p}_{i,m_i}$ を求める ($1 \leq i \leq r$).

手順 3 : それぞれの固有値に対し, 固有空間の次元と重複度が一致しているかどうかを調べる. 全て一致しているときにかぎり対角化可能で手順 4 へ.

手順 4 : $P = (\mathbf{p}_{1,1}\mathbf{p}_{1,2} \dots \mathbf{p}_{1,m_1}\mathbf{p}_{2,1}\mathbf{p}_{2,2} \dots \mathbf{p}_{2,m_2} \dots)$ とおくと,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & \leftarrow m_1 \text{ 個} & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & \\ & & m_2 \text{ 個} \rightarrow & \ddots & \\ & & & & \lambda_2 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

補足 10-4 : 定理 9-2 と定理 10-1 より, n 次正方行列 A が n 個の異なる固有値をもてば, A は対角化可能であることが分かる.

例 10-1 : 次の行列が対角化可能であるかどうかを調べ, 対角化可能ならば対角化せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

解答 :