

ノート 11：対称行列の対角化

11-1. 対称行列の対角化

定理 11-1（教科書 P.118 定理 5.6）

対称行列 A に対し，次の (1)，(2) が成立する．

(1) A の固有値は全て実数．

(2) 相異なる A の固有値に対する A の固有ベクトルは互いに直交する．

定理 11-1 の証明：

(1) の証明：

(2) の証明：

任意の正方行列 A に対して， $P^{-1}AP$ が三角行列になるある正則行列 P が存在することが知られている（教科書 P.129 定理 5.9 参照）．特に， A の固有値が全て実数のときは， P として直交行列をとることができることが知られている（証明は省略）．

定理 11-2

固有値が全て実数の行列 A に対し， tPAP が上三角行列となる，ある直交行列 P が存在する．

定理 11-2 より，対称行列はある直交行列によって対角化されることが分かる．

定理 11-3（教科書 P.119 定理 5.7）

対称行列はある直交行列によって対角化される．

定理 11-3 の証明：

対称行列の直交行列による対角化の方法：

手順1： A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ を求める．

手順2： λ_i に対する A の固有ベクトル $\mathbf{p}_{i,1}, \mathbf{p}_{i,2}, \dots, \mathbf{p}_{i,m_i}$ を求め，これらに対しグラムシュミットの直交化法を適用し，正規直交系 $\{\mathbf{u}_{i,1}, \mathbf{u}_{i,2}, \dots, \mathbf{u}_{i,m_i}\}$ を構成する ($1 \leq i \leq r$)．

手順3： $P = (\mathbf{u}_{1,1} \dots \mathbf{u}_{1,m_1} \mathbf{u}_{2,1} \dots \mathbf{u}_{2,m_2} \dots)$ とおくと，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & \leftarrow m_1 \text{ 個} & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & \\ & m_2 \text{ 個} \rightarrow & & \ddots & \\ & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

例 11-1： $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を直交行列によって対角化せよ．

解答：