

ノート 12 : 2 次形式・行列多項式

1. 2 次形式

n 変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ に関する実係数の 2 次同次式

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq i \leq n} a_{i,j} x_i x_j$$

$$a_{i,j} = a_{j,i} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

を $x_1, x_2, \dots, x_n$ の 2 次形式という.

$$A = (a_{i,j}), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{とおくと, 2 次形式 } Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ は次のように表せる.}$$

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q(\mathbf{x}) = {}^t \mathbf{x} A \mathbf{x} = (A \mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A \mathbf{x})$$

証明 :

例 1-1 : 2 次形式の例

例 1-2 : n 次の正方行列 P に対して, $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ とおくと, $Q(\mathbf{x}) = {}^t \mathbf{y} ({}^t P A P) \mathbf{y}$ となる.

注 1-1 : 例 1-2 の ${}^t P A P$ は対称行列なので $Q(\mathbf{x})$ は $\mathbf{y}$ の 2 次形式とみることができる.

例 1-2 より, 次の定理が分かる.

定理 12-1 (教科書 P.126 定理 5.8)

$Q(\mathbf{x})$ を n 変数の 2 次形式とする. このとき, ある直行行列 P が存在して, $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ とおくと, $Q(P\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ となる.

ここで, $\mathbf{y} = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_n)$ とし, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ は A の固有値である.

定理 12-1 の証明 :

補足 1-1 : $Q(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$ の形の 2 次形式を標準系という.

例題 1-1 : 2 次形式 $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$ の標準系と変換の行列 P を求めよ.

2. 行列多項式

多項式 $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$ と正方行列 A に対して, A の行列多項式 $f(A)$ を次のように定義する.

$$f(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + a_{m-1}A + a_mE$$

次の 2 つの定理がよく知られている (証明は教科書参照).

定理 12-2 フロベニウスの定理 (教科書 P.130 定理 5.10)
 n 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とするとき,
行列多項式 $f(A)$ の固有値は $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ である.

定理 12-3 ハミルトン-ケーリーの定理 (教科書 P.131 定理 5.11)
正方行列 A の固有多項式 $F_A(\lambda)$ に対して, $F_A(A) = O$ が成り立つ.

例題 2-1 : 正方行列 A が $A^2 = E$ を満たすとき, A の固有値は ± 1 であることを証明せよ.
ただし, $A \neq E, A \neq -E$ とする. (注意: 教科書の説明は不十分)

例 2-1 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$.