

後期第 1 回中間試験対策プリントの 2009 の解答

2009 年度後期第 1 回中間試験問題

1 U, V, W を K 上の線形空間とする. 次の問に答えよ.

((1)–(6) : 各 5 点, (7)–(9) : 各 10 点)

(1) V の部分集合 V_0 が V の部分空間であるための条件をかけ.

(2) ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in V$ が線形独立であるための条件をかけ.

(3) ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in V$ が線形従属であるための条件をかけ.

(4) ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in V$ が V の部分空間 V_0 の基底であるための条件をかけ.

(5) 写像 $f : V \rightarrow W$ が線形写像であるための条件をかけ.

(6) V の部分空間 V_0 に対し, $\mathbf{0} \in V_0$ を示せ.

(7) 線形写像 $f : V \rightarrow W$ と $\mathbf{y} \in W$ に対し, $f^{-1}(\mathbf{y})$ が V の部分空間であるかどうか調べよ.

(8) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ を V の基底とするとき, $\mathbf{x} \in V$ を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ の線形結合として表す仕方は一通りしかないことを示せ.

(9) 線形写像 $f : U \rightarrow V, g : V \rightarrow W$ に対し, $g \circ f$ も線形写像となることを示せ.

$$2 \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$W_1 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle, W_2 = \langle \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6 \rangle, A = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4)$ とする. 次の問に答えよ.

((1) : 20 点, (2) : 10 点, (3) : 10 点)

(1) $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ の次元と基底を求めよ.

(2) $W_3 = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}, W_4 = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4\}$ の次元と基底を求めよ.

(3) $W_5 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 : {}^t\mathbf{a}_1\mathbf{x} = 0\}, W_6 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 : {}^t\mathbf{a}_1\mathbf{x} = 1\}$ が $\mathbf{R}^4$ の部分空間であるかどうかそれぞれ調べよ.

(解答)

問 1

(1)–(5) 略. (プリント参照)

(6) V_0 は部分空間なので $V_0 \neq \emptyset$. $\mathbf{x} \in V_0$ に対し, V_0 は部分空間なので $-\mathbf{x} \in V_0$. $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) \in V_0$ より $\mathbf{0} \in V_0$.

(7) $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ のとき, $f^{-1}(\mathbf{y})$ は部分空間 (第 19 回の後期演習課題の解答参照). $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ のとき, $f^{-1}(\mathbf{y})$ が部分空間であると仮定すると, (6) より $\mathbf{0} \in f^{-1}(\mathbf{y})$. つまり $f(\mathbf{0}) = \mathbf{y}$ となる. f は線形写像な

ので $k \neq 1$ に対し, $\mathbf{y} = f(\mathbf{0}) = f(k\mathbf{0}) = kf(\mathbf{0}) = k\mathbf{y}$, したがって $(1-k)\mathbf{y} = \mathbf{0}$ を得るが, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ となり矛盾である. よって, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ のとき, $f^{-1}(\mathbf{y})$ は部分空間ではない.

(8), (9) 略. (後期第1回レポート解答参照)

問2

(1) $\text{rank } A = 2$, $\text{rank}(\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5\mathbf{a}_6) = 3$ より, $\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 3$. W_1 の基底として $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4\}$, W_2 の基底として $\{\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6\}$ がとれる.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4 \rangle &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \\ w & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -5y + 3z + w = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \langle \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6 \rangle &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 0 \\ y & 1 & 0 & 1 \\ z & -2 & 0 & 0 \\ w & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow z + 2w = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -5y + 3z + w = 0 \\ z + 2w = 0 \end{cases}$$

を解くと,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = t\mathbf{a}_4$$

となるので, $\dim W_1 \cap W_2 = 1$. $W_1 \cap W_2$ の基底として $\{\mathbf{a}_4\}$ がとれる.

(別解)

$\text{rank}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5\mathbf{a}_6) = 4$ より, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6$ は線形独立. $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = y_1\mathbf{a}_4 + y_2\mathbf{a}_5 + y_3\mathbf{a}_6$ とすると, $x_1\mathbf{a}_1 + (x_2 - y_1)\mathbf{a}_4 + (-y_2)\mathbf{a}_5 + (-y_3)\mathbf{a}_6 = \mathbf{0}$. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6$ は線形独立なので, $x_1 = x_2 - y_1 = -y_2 = -y_3 = 0$. 以上より, $\mathbf{x} \in W_1 \cap W_2$ ならば $\mathbf{x} \in \{\mathbf{a}_4\}$ がわかる. $\mathbf{x} \in \{\mathbf{a}_4\}$ ならば $\mathbf{x} \in W_1 \cap W_2$ は明らかなので, $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{a}_4\}$. つまり, $\dim W_1 \cap W_2 = 1$ であり, $W_1 \cap W_2$ の基底として $\{\mathbf{a}_4\}$ がとれる.

(2) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解くと,

$$\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

つまり, $\dim W_3 = 2$ である. W_3 の基底として, $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$ がとれる.

$$\begin{aligned} W_4 &= \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4\} \\ &= \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle = W_1 \end{aligned}$$

より, $\dim W_4 = 2$. W_4 の基底として $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4\}$ がとれる.

(3) 行列 ${}^t\mathbf{a}_1$ で表される線形写像を f とおくと,

$$\begin{aligned} W_5 &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 : {}^t\mathbf{a}_1\mathbf{x} = 0\} = f^{-1}(0) \\ W_6 &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 : {}^t\mathbf{a}_1\mathbf{x} = 1\} = f^{-1}(1) \end{aligned}$$

となるので, 問題 1 (7) より, W_5 は $\mathbf{R}^4$ の部分空間, W_6 は $\mathbf{R}^4$ の部分空間ではない.