

2011 年度後期第 1 回中間試験

1 V を R 上の線形空間, $v_1, v_2, \dots, v_m$ を V の線形独立なベクトルとし,

$$W_1 = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle,$$

$$W_2 = \langle v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \dots, v_1 + v_2 + \dots + v_m \rangle,$$

$$W_3 = \langle v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \dots, v_{m-1} - v_m, v_m - v_1 \rangle \text{ とする.}$$

このとき, 次の問に答えよ.

(1) $v_1, v_2, \dots, v_m$ が線形独立であるとはどういうことを説明せよ.

(2) $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$ がどのような集合であることを説明せよ.

(3) V の部分集合 W が V の部分空間であるとはどういうことを説明せよ.

(4) W_1 が V の部分空間であることを示せ.

(5) 次のベクトルが線形独立であるかどうかを調べよ.

(i) $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \dots, v_1 + v_2 + \dots + v_m$

(ii) $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \dots, v_{m-1} - v_m, v_m - v_1$

(iii) $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \dots, v_{m-1} - v_m$

(6) V の部分空間 W の次元が m であるとはどういうことを説明せよ.

(7) W_1, W_2, W_3 の次元を求めよ.

以下 V の次元を m とし, f を次の対応をもつ V 上の線形変換とする.

$$f(v_i) = v_i - v_{i+1} \quad (1 \leq i \leq m-1),$$

$$f(v_m) = v_m - v_1.$$

(8) f が V 上の線形変換であるとはどういうことを説明せよ.

(9) $f^{-1}(0)$ の定義を述べよ.

(10) $f^{-1}(0)$ と $f(V)$ の次元をそれぞれ求めよ.

(11) $f(v_1 + v_2 + \dots + v_m)$ を計算せよ.

(12) $f^{-1}(0)$ と $f(V)$ の基底をそれぞれ求めよ.

$$2 \quad a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$W_1 = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle, W_2 = \langle a_4, a_5, a_6 \rangle, A = (a_1 a_2 a_3 a_4)$ とする. 次の問に答えよ.

(1) W_1 の次元と基底を求めよ.

(2) W_2 の次元と基底を求めよ.

(3) $W_1 \cap W_2$ の次元と基底を求めよ.

(4) $W_3 = \{x \in R^4 : Ax = 0\}$ が R^4 の部分空間であることを示せ.

(5) W_3 の次元と基底を求めよ.

(6) $W_4 = \{Ax : x \in R^4\}$ の次元と基底を求めよ.

2011 後期第 1 回中間試験解答

1

(1) - (3) : 略

(4) : $x, y \in W_1, \lambda \in R$ とする . このとき ,

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_m v_m, \quad y = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \cdots + y_m v_m$$

とかけ ,

$$x + y = (x_1 + y_1) v_1 + (x_2 + y_2) v_2 + \cdots + (x_m + y_m) v_m \in W_1$$

$$\lambda x = (\lambda x_1) v_1 + (\lambda x_2) v_2 + \cdots + (\lambda x_m) v_m \in W_1$$

となることが分かる . よって W_1 は V の部分空間である .

(5) : (i) $c_1 v_1 + c_2(v_1 + v_2) + c_3(v_1 + v_2 + v_3) + \cdots + c_m(v_1 + v_2 + \cdots + v_m) = 0$ とする . このとき ,

$$(c_1 + c_2 + \cdots + c_m) v_1 + (c_2 + \cdots + c_m) v_2 + \cdots + c_m v_m = 0$$

となり , $v_1, v_2, \dots, v_m$ が線形独立であることから

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_m = 0$$

$$c_2 + \cdots + c_m = 0$$

...

$$c_m = 0$$

となる . よって , $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ となるので , $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \dots, v_1 + v_2 + \cdots + v_m$ が線形独立であることが分かる .

(ii) $1 \times (v_1 - v_2) + 1 \times (v_2 - v_3) + \cdots + 1 \times (v_m - v_1) = 0$ より , $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \dots, v_{m-1} - v_m, v_m - v_1$ が線形従属であることが分かる .

(iii) $v_1, v_2, \dots, v_m$ が線形独立であることから ,

$$c_1(v_1 - v_2) + c_2(v_2 - v_3) + \cdots + c_{m-1}(v_m - v_1) = 0$$

$\iff$

$$c_1 v_1 + (c_2 - c_1) v_2 + (c_3 - c_2) v_3 + \cdots + (c_{m-1} - c_{m-2}) v_m + c_{m-1} v_m = 0$$

$\iff$

$$c_1 = 0, c_2 - c_1 = 0, \dots, c_{m-1} - c_m = 0, c_m = 0 \iff c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0 .$$

よって , $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \dots, v_{m-1} - v_m$ が線形独立であることが分かる .

(6) : 略

(7) : $\dim W_1 = m$. (5) (i) より , $\dim W_2 = m$. (5) (ii), (iii) より , $\dim W_3 = m - 1$.

(8)-(9) : 略

(10) : $v_1, v_2, \dots, v_m$ が V の基底であることから ,

$$y \in f(V) \iff y = f(x_1 v_1 + \dots + x_m v_m) \text{ とかける } \iff$$

$$y = x_1 f(v_1) + \dots + x_m f(v_m) \text{ とかける } \iff$$

$$y = x_1(v_1 - v_2) + x_2(v_2 - v_3) + \dots + x_m(v_m - v_1) \text{ とかける } \iff y \in W_3 .$$

よって , $f(V) = W_3$ となるので (7) より , $\dim f(V) = m - 1$ であることが分かる . また , 次元定理より , $\dim f^{-1}(0) = \dim V - \dim f(V) = 1$ となる .

(11) : 0

(12) : (10) より , $f(V) = W_3$. よって (5) (ii), (iii) より , $f(V)$ の基底として $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \dots, v_{m-1} - v_m\}$ がとれる .

(7) より , $\dim f^{-1}(0) = 1$. (11) より , $v_1 + v_2 + \dots + v_m \in f^{-1}(0)$. $v_1, v_2, \dots, v_m$ は線形独立なので $v_1 + v_2 + \dots + v_m \neq 0$. 以上より , $f^{-1}(0)$ の基底として $\{v_1 + v_2 + \dots + v_m\}$ がとれる .

2

(1) $\dim W_1 = 3$. W_1 の基底として , $\{a_1, a_2, a_4\}$ がとれる .

(2) $\dim W_2 = 2$. W_2 の基底として , $\{a_4, a_5\}$ がとれる .

(3) $\dim W_1 \cap W_2 = 1$. $W_1 \cap W_2$ の基底として , $\{a_4\}$ がとれる .

(4) : 略

(5) $\dim W_3 = 1$. W_3 の基底として , $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ がとれる .

(6) $\dim W_4 = 3$. W_4 の基底として , $\{a_1, a_2, a_4\}$ がとれる .