理学部応用化学科 数学 1 及び演習 (担当: 津垣)

2012 年 6 月 11 日 (月)

第 1 回中間試験

$\boxed{1}$ n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，次の問に答えよ．

(1) 次の用語の説明を A を用いてせよ．

(i) 対称行列　(ii) 交代行列　(iii) 直交行列　(iv) 正則行列　(v) 余因子行列

(2) A が正則行列で各行の成分の和が 1 ならば，A^{-1} の各行の成分の和も 1 であることを示せ．
(ヒント：$A^{-1} = (b_{ij})$ とおき，$A^{-1}A = E$ の (i, j) 成分を考える)

(3) ある n 次正方行列 B に対し $A - B$ と $A + B$ が共に対称行列ならば，A も対称行列であることを示せ．

(4) $\mathrm{tr}({}^tAA) = 0$ ならば $A = O$ であることを示せ．

(5) $A + E$ と $A - E$ が共に直交行列であるとき，$A = O$ であることを示せ．

$\boxed{2}$ n 次正方行列 $A_n = (a^{|i-j|})$ に対して，次の問に答えよ．

(1) $|A_3|$ を計算せよ．

(2) $|A_n|$ を漸化式を用いて計算せよ．

(3) A_n が正則であるための必要十分条件を求めよ．

(4) A_3 が正則のとき，A_3 の逆行列を求めよ．

(5) A_3 が正則のとき，次の連立 1 次方程式をクラメルの公式を用いて解け．

$$A_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

理学部応用化学科 数学 1 及び演習 (担当: 津垣)

2012 年 6 月 11 日 (月)

2012 年度第 1 回中間試験の略解

$\boxed{1}$

(1)：教科書またはノート参照. $\square$

(2)：A^{-1} の (i,j) 成分を b_{ij} とする.

$\displaystyle\sum_k b_{ik}a_{kj} = \delta_{ij}$ と $\displaystyle\sum_j a_{kj} = 1$ に注意すると,

$\displaystyle 1 = \sum_j \delta_{ij} = \sum_j(\sum_k b_{ik}a_{kj}) = \sum_k(\sum_j b_{ik}a_{kj}) = \sum_k b_{ik}(\sum_j a_{kj}) = \sum_k b_{ik}.$ $\square$

(3)：$A - B = {}^t(A-B) = {}^tA - {}^tB \cdots$(I), $\quad A + B = {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \cdots$(II).

(I)+(II) より, $2A = 2\,{}^tA, \quad \therefore\ A = {}^tA.$ $\square$

(4)：$\mathrm{tr}\,({}^tAA) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)$（提出課題参照）より. $\square$

(5)：${}^t(A+E)(A+E) = E$ より, ${}^tAA + {}^tA + A = 0 \cdots$(I).

${}^t(A-E)(A-E) = E$ より, ${}^tAA - {}^tA - A = 0 \cdots$(II).

(I)+(II) より, ${}^tAA = 0$ となるので, 前問 (4) より, $A = 0$. $\square$

$\boxed{2}$

(1)：$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$ より, $\mid A_3 \mid = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = (1-a^2)^2$. $\square$

(2)：

$$\mid A_n \mid = \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ a & 1 & \cdots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & 1 & a \\ a^{n-1} & a^{n-2} & \cdots & a & 1 \end{vmatrix}$$

n 行 $-(n-1)$ 行 × a を計算してから n 列で展開すると,

$\mid A_n \mid = (1-a^2) \mid A_{n-1} \mid, \qquad \therefore\ \mid A_n \mid = (1-a^2)^{n-1}.$ $\square$

(3)：A_n が正則 $\Longleftrightarrow \mid A_n \mid \neq 0 \Longleftrightarrow a \neq \pm 1$ $\square$

(4)：$A_{11} = 1 - a^2 \qquad A_{21} = a^3 - a \qquad A_{31} = 0$
$A_{12} = a^3 - a \qquad A_{22} = 1 - a^4 \qquad A_{32} = a^3 - a$
$A_{13} = 0 \qquad A_{23} = a^3 - a \qquad A_{33} = 1 - a^2$

よって,

$$ {}^t\tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -a(1-a^2) & 0 \\ -a(1-a^2) & (1-a^2)(1+a^2) & -a(1-a^2) \\ 0 & -a(1-a^2) & 1-a^2 \end{pmatrix}, $$

$$ \therefore \ A_3^{-1} = \frac{1}{1-a^2} \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ -a & (1+a^2) & -a \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square $$

(5)：クラメールの公式より,

$$ x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1+a}, \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-a}{1+a}, \ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1+a}. \qquad \square $$