

[1] n を正の整数とする. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ に対して, 次の問いに答えよ.

- (1) tAA は対称行列であることを示せ.
- (2) A を交代行列とするとき, A の対角成分は全て 0 であることを示せ.
- (3) α, β を定数とするとき, $\text{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{tr} A + \beta \text{tr} B$ が成り立つことを示せ.
- (4) $A, E - A$ を正則行列とするとき, $A(E - A)^{-1} = (E - A)^{-1}A$ が成り立つことを示せ.
- (5) A を全ての成分が整数である直交行列とする. このような A は, 全部でいくつあると考えられるかを答えよ.

[2]
$$\begin{vmatrix} x+2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & x-1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & x-1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & x-1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & -3 & x+4 \end{vmatrix}$$
 を因数分解せよ.

[3] 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

- (1) $|A|$ を因数分解せよ.
- (2) A が正則であるための必要十分条件を求めよ.
- (3) A が正則のとき, A の逆行列を求めよ.
- (4) A が正則のとき, 次の連立 1 次方程式をクラメル公式を用いて解け.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ay + a^2z = 1 \\ x + a^2y + a^4z = 0 \end{cases}$$

2013 年度前期中間試験の略解

1

(1) : 教科書またはノート参照. □

(2) : A を交代行列とすると, ${}^tA = -A$. 従って, $({}^tA \text{ の } (i, i) \text{ 成分}) = (-A \text{ の } (i, i) \text{ 成分}) \quad (1 \leq i \leq n)$.

よって, $(A \text{ の } (i, i) \text{ 成分}) = -(A \text{ の } (i, i) \text{ 成分})$, すなわち $(A \text{ の } (i, i) \text{ 成分}) = 0$.

故に, A の対角成分は全て 0 である. □

(3) : 教科書またはノート参照. □

(4) : 教科書またはノート参照. □

(5) : A を直交行列とすると, ${}^tAA = E$.

よって, $({}^tAA \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) = (E \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$.

ここで

$$\begin{aligned} ({}^tAA \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) &= \sum_{k=1}^n ({}^tA \text{ の } (i, k) \text{ 成分})(A \text{ の } (k, j) \text{ 成分}) \\ &= \sum_{k=1}^n (A \text{ の } (k, i) \text{ 成分})(A \text{ の } (k, j) \text{ 成分}) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}, \\ (E \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

であるから, $\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$.

従って,

$$i = j \text{ のとき, } \sum_{k=1}^n a_{kj}a_{kj} = \delta_{jj} = 1, \quad \text{すなわち} \quad \sum_{k=1}^n (a_{kj})^2 = 1. \quad (5.1)$$

$$i \neq j \text{ のとき, } \sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} = 0, \quad \text{すなわち} \quad \sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = 0. \quad (5.2)$$

さらに, A の全ての成分を整数とすると, (5.1) より

各 $j (1 \leq j \leq n)$ に対し, $a_{ijj} = \pm 1, a_{kj} = 0 (k \neq i_j)$ となる $i_j (1 \leq i_j \leq n)$ が 1 つずつ存在する (5.3)

ことが分かる. このことと (5.2) より,

$$i_1, i_2, i_3, \dots, i_n \text{ は全て相異なる} \quad (5.4)$$

ことが分かる. (5.3) より, i_1 の選び方は $2n$ 通りあり, その各々に対し (5.3), (5.4) より i_2 の選び方は $2(n-1)$ 通りある. 同様に, $i_1, i_2, i_3, \dots, i_{j-1} \quad (2 \leq j \leq n)$ の選び方 1 つに対し, i_j の

選び方は $2\{n - (j - 1)\}$ 通りあるから、全ての成分が整数である直交行列は全部で

$$2n \times 2(n - 1) \times 2(n - 2) \times \cdots \times (2 \cdot 1),$$

すなわち, $2^n(n!)$ 個ある. □

2

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x+2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & x-1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & x-1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & x-1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & -3 & x+4 \end{vmatrix} = (x+4) \cdot (-1)^{5+5} \begin{vmatrix} x+2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & x-1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & x-1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x+4) \begin{vmatrix} x+3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x-3 & 3 & 2 \\ x+3 & 0 & x-1 & 2 \\ 0 & -(x-3) & 2 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x+4) \begin{vmatrix} x+3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x-3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & x-2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= (x+4) \begin{vmatrix} x+3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x-3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & x-2 & 2 \\ 0 & 0 & x+3 & x+3 \end{vmatrix} \\ &= (x+4) \begin{vmatrix} x+3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x-3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & x-4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+3 \end{vmatrix} \\ &= (x+4)(x+3)(x-3)(x-4)(x+3) \\ &= (x+4)(x+3)^2(x-3)(x-4). \end{aligned}$$

□

3

(1) : $a(a+1)(a-1)^3$

□

(2) : $a \neq 0, \pm 1$

□

(3) : $A^{-1} = \frac{1}{a(a+1)(a-1)^2} \begin{pmatrix} a^4 & -a^2(a+1) & a \\ -a^2(a+1) & (a^2+1)(a+1) & -(a+1) \\ a & -(a+1) & 1 \end{pmatrix}$

□

$$(4) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{a(a+1)(a-1)^2} \begin{pmatrix} a^2(a^2-a-1) \\ a+1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \square$$