

- [1] n を正の整数とする. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ に対して, A, B を上三角行列とするとき, AB も上三角行列になることを示せ.

- [2] A, B を同じ型の直交行列とするとき, AB も直交行列になることを示せ.

[3] $\begin{vmatrix} x - \sqrt{2} & \sqrt{3} & -\sqrt{5} \\ \sqrt{3} & x - \sqrt{2} & \sqrt{5} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{5} & x - \sqrt{3} \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

- [4] $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a^2 \end{pmatrix}$ とするとき, A が正則であるための a に関する必要十分条件を求めよ. さらに, この条件のもとで A の逆行列を求めよ.

- [5] A を 3 次正方行列とする. 連立 1 次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

- (1) この連立 1 次方程式が自明でない解をもつための必要十分条件を, A を用いて 3 つ答えよ.

- (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$ とする. この連立 1 次方程式が自明でない解をもつための, a に関する必要十分条件を求めよ.

- [6] 次の連立 1 次方程式を, 掃き出し法を用いて解け.

(1)
$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x + 3y - 7z = -3 \\ 3x + 2y + (a+4)z = b-8 \end{cases} \quad \text{ただし, } a, b \text{ を定数とする.}$$

2013 年度前期到達度評価試験の略解

1

A, B は上三角行列であるから, $a_{ik} = 0$ ($i > k$ のとき), $b_{kj} = 0$ ($j < k$ のとき).
従って $i > j$ のとき,

$$\begin{aligned} AB \text{ の } (i, j) \text{ 成分} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \\ &= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{i,i-1} b_{i-1,j} + a_{ii} b_{ij} + a_{i,i+1} b_{i+1,j} + \cdots + a_{in} b_{nj} \\ &= 0 \cdot b_{1j} + 0 \cdot b_{2j} + \cdots + 0 \cdot b_{i-1,j} + a_{ii} \cdot 0 + a_{i,i+1} \cdot 0 + \cdots + a_{in} \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって AB のどの列においても, 対角成分より下の成分は全て 0 となるから, AB も上三角行列になる. □

2

教科書またはノート参照. □

3

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x - \sqrt{2} & \sqrt{3} & -\sqrt{5} \\ \sqrt{3} & x - \sqrt{2} & \sqrt{5} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{5} & x - \sqrt{3} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x - \sqrt{2} + \sqrt{3} & x - \sqrt{2} + \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & x - \sqrt{2} & \sqrt{5} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{5} & x - \sqrt{3} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x - \sqrt{2} + \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & x - \sqrt{2} - \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} + \sqrt{5} & x - \sqrt{3} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x - \sqrt{2} + \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} + \sqrt{3} & x - \sqrt{3} + \sqrt{5} & x - \sqrt{3} + \sqrt{5} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} + \sqrt{5} & x - \sqrt{3} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x - \sqrt{2} + \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} + \sqrt{3} & x - \sqrt{3} + \sqrt{5} & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} + \sqrt{5} & x - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5} \end{vmatrix} \\ &= (x - \sqrt{2} + \sqrt{3}) (x - \sqrt{3} + \sqrt{5}) (x - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}) \\ &= (x - \sqrt{3} + \sqrt{5}) (x - \sqrt{2} + \sqrt{3}) (x - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}). \end{aligned}$$

□

4

a に関する必要十分条件は, $a \neq \pm 1$.

$$A \text{ の逆行列は } \frac{1}{(a+1)(a-1)} \begin{pmatrix} a^2+a+1 & a+1 & -1 \\ a+1 & a+1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

5

(1): 教科書またはノート参照.

□

(2): $a = -6, 3$.

□

6

$$(1): \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_1, t_2, t_3: \text{任意定数}).$$

□

$$(2): \begin{cases} a \neq -2 \text{ のとき, } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{a+2} \begin{pmatrix} -3a-4b-2 \\ a+5b-3 \\ b-1 \end{pmatrix}. \\ a = -2 \text{ かつ } b = 1 \text{ のとき, } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t: \text{任意定数}). \\ a = -2 \text{ かつ } b \neq 1 \text{ のとき, } \text{解なし.} \end{cases}$$

□