

1 u_1, u_2, u_3, u_4 を R^4 の基底とする .

このとき , 次の問に答えよ .

(1) R^4 のベクトル v_1, v_2, v_3, v_4 が線形独立であるとはどういうことを説明せよ .

(2) 次のベクトルが線形独立であるかどうかを調べよ .

(i) $u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_4$

(ii) $u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_4, u_4 + u_1$

(3) $W = \langle u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_4, u_4 + u_1 \rangle$ の次元と基底を求めよ .

(4) R^4 上の写像 f が R^4 上の線形変換であるとはどういうことを説明せよ .

(5) R^4 上の写像 f に対し , $f(R^4)$ と $f^{-1}(0)$ がどのような集合であることを説明せよ .

(6) R^4 の部分集合 U が R^4 の部分空間であるとはどういうことを説明せよ .

(7) R^4 上の写像 f で $f^{-1}(0)$ が R^4 の部分空間にならない例を一つ挙げ , 何故ならないのかを説明せよ .

以下 f を次の対応をもつ R^4 上の線形変換とする .

$$f(u_i) = u_i + u_{i+1} \quad (1 \leq i \leq 3),$$

$$f(u_4) = u_4 + u_1.$$

(8) $f(R^4) = W$ であることを証明せよ .

(9) $f(u_1 - u_2 + u_3 - u_4)$ を計算せよ .

(10) $f^{-1}(0)$ の次元と基底を求めよ .

$$2 \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$W_1 = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle, W_2 = \langle a_4, a_5, a_6 \rangle, A = (a_1 a_2 a_3 a_4)$ とする .

このとき次の問に答えよ .

(1) W_1 の次元と基底を求めよ .

(2) W_2 の次元と基底を求めよ .

(3) $W_1 \cap W_2$ の次元と基底を求めよ .

(4) $W_3 = \{x \in R^4 : Ax = 0\}$ の次元と基底を求めよ .

(5) $W_4 = \{Ax : x \in R^4\}$ の次元と基底を求めよ .

2014 年度後期中間試験解答

1

(1), (4), (5), (6) : 略

(2) : (i) $c_1(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + c_2(\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) + c_3(\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4) = \mathbf{0}$ とする . これを

$$c_1\mathbf{u}_1 + (c_1 + c_2)\mathbf{u}_2 + (c_2 + c_3)\mathbf{u}_3 + c_3\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$$

と書きなおすと , $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ が線形独立であることから

$$c_1 = c_1 + c_2 = c_2 + c_3 = c_3 = 0$$

となる . これより $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となるので , $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4$ は線形独立である .

(ii) $c_1(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + c_2(\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) + c_3(\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4) + c_4(\mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_1) = \mathbf{0}$ — (*) とする . これを

$$(c_1 + c_4)\mathbf{u}_1 + (c_1 + c_2)\mathbf{u}_2 + (c_2 + c_3)\mathbf{u}_3 + (c_3 + c_4)\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$$

と書きなおすと , $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ が線形独立であることから

$$c_1 + c_4 = c_1 + c_2 = c_2 + c_3 = c_3 + c_4 = 0$$

となる .

よって例えば , $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 1, c_4 = -1$ で (*) が成り立つので , $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_1$ は線形従属である .

(3) : (2) より $\dim W = 3$. W の基底として $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4$ がとれる .

(7) : 例 : 全ての $x \in R^4$ に対して $f(x) = \mathbf{u}_1$ である写像 f

理由 : f が R^4 上の線形写像であると仮定する .

このとき $\mathbf{u}_1 = f(0x) = 0f(x) = \mathbf{0}$ となる .

よってこのとき $1\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3 + 0\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$ となり , これは $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ が線形独立であることに矛盾 .

よって f は R^4 上の線形写像ではない .

(8) : $y \in f(R^4)$

$\iff y = f(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 + c_4\mathbf{u}_4)$ と書ける

$\iff y = c_1(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + c_2(\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) + c_3(\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4) + c_4(\mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_1)$ と書ける

$\iff y \in \langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 \rangle = W$

よって $f(R^4) = W$ である .

(9) : $f(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4) = f(\mathbf{u}_1) - f(\mathbf{u}_2) + f(\mathbf{u}_3) - f(\mathbf{u}_4) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) - (\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) + (\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4) - (\mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_1) = \mathbf{0}$

(10) : 次元定理と (3) と (8) より $\dim f^{-1}(\mathbf{0}) = \dim R^4 - \dim f(R^4) = \dim R^4 - \dim W = 1$.

(9) より $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4 \in f^{-1}(\mathbf{0})$.

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ が線形独立であることから $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4 \neq \mathbf{0}$.

以上より $f^{-1}(\mathbf{0})$ の次元は 1 で基底として $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4$ がとれる .

2

(1) $\dim W_1 = 3$. W_1 の基底として , $\{a_2, a_3, a_4\}$ がとれる .

(2) $\alpha = 0$ の場合 : $\dim W_2 = 2$. W_2 の基底として , $\{a_4, a_6\}$ がとれる .

$\alpha \neq 0$ の場合 : $\dim W_2 = 3$. W_2 の基底として , $\{a_4, a_5, a_6\}$ がとれる .

(3) $\alpha = 0$ の場合 : $\dim W_1 \cap W_2 = 1$. $W_1 \cap W_2$ の基底として , $\{a_4\}$ がとれる .

$\alpha \neq 0$ の場合 : $\dim W_1 \cap W_2 = 2$. $W_1 \cap W_2$ の基底として , $\{a_2, a_4\}$ がとれる .

(4) $\dim W_3 = 1$. W_3 の基底として , $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ がとれる .

(5) $\dim W_4 = 3$. W_4 の基底として , $\{a_2, a_3, a_4\}$ がとれる .