

m, n を正の整数とする. 以下の問いに答えよ.

- [1] n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し, $AE = A$ が成り立つことを示せ. ただし, 講義で用いた方法と同様の方法を用いることにより解答せよ.
- [2] A, B を同じ型の行列とする. A が対称行列, B が交代行列であるとき, $(A+B)(A-B)$ は対称行列となることを示せ.
- [3] $A = (a_{ij})$ を全ての成分が整数である $m \times n$ 行列とする. このとき, $\text{tr}({}^tAA) = 1$ を満たす A は, 全部でいくつあると考えられるかを答えよ.
- [4] A, B を n 次正則行列とすると, $\begin{pmatrix} A & O \\ (A^{-1}B^{-1})^{-1} & B \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.
- [5] A, B, C を n 次正方行列とし, $D = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ とおく. D が直交行列であるとき, A, B は (D と型が異なる) 直交行列になり, $C = O$ になることを示せ. (ヒント: ${}^tD = \begin{pmatrix} {}^tA & O \\ {}^tC & {}^tB \end{pmatrix}$)

[6]
$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & -2 & -5 & 5 \\ 0 & x-4 & 3 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & x-8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & x+1 & 9 \\ 3 & -1 & 4 & 5 & x+1 \end{vmatrix}$$
 を因数分解せよ.

[7] $A = \begin{pmatrix} a^2 & -a & 1 \\ 1 & a^2 & -a \\ -a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問いに答えよ. ただし, 因数分解は実数の範囲まで行って解答せよ.

- (1) $|A|$ を因数分解せよ.
- (2) A が正則であるための a に関する必要十分条件を求めよ.
- (3) A が正則であるとき, A の逆行列を, 余因子を用いて求めよ.
- (4) A が正則であるとき, 次の連立1次方程式を, クラメルの公式を用いて解け.

$$\begin{cases} a^2x - ay + z = 1 \\ x + a^2y - az = 0 \\ -ax + y + a^2z = -1 \end{cases}$$

2014 年度前期中間試験の略解

1 教科書またはノート参照. □

2 教科書またはノート参照. □

3

$$\operatorname{tr}({}^tAA) = \sum_{j=1}^n ({}^tAA \text{ の } (j, j) \text{ 成分}) = \cdots = \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^m (a_{ij})^2 \right\} \text{ となるから, } \operatorname{tr}({}^tAA) = 1 \text{ とすると}$$

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^m (a_{ij})^2 \right\} = 1.$$

ここで A の全ての成分が整数であるから,

A のある 1 つの成分のみが -1 または 1 になり, A の残りの全ての成分は 0 になることが分かる. A の成分は全部で mn 個あるから, $\operatorname{tr}({}^tAA) = 1$ を満たす全ての成分が整数である $m \times n$ 行列 A は全部で, $2mn$ 個ある. □

4
$$\begin{pmatrix} A & O \\ (A^{-1}B^{-1})^{-1} & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -E_n & B^{-1} \end{pmatrix}$$
 □

5 D を直交行列とすると, ${}^tDD = D^tD = E_{2n}$. ここで ${}^tDD = E_{2n}$ から

$${}^tAA = E_n \cdots \cdots (1),$$

$${}^tAC = O \cdots \cdots (2).$$

同様に $D^tD = E_{2n}$ から

$$B^tB = E_n \cdots \cdots (3).$$

従って (1) から A は直交行列, (3) から B も直交行列になる.

よって A は直交行列になることから $A^tA = E_n$. このことと (2) から $C = O$. □

6

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} x+3 & 1 & -2 & -5 & 5 \\ 0 & x-4 & 3 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & x-8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & x+1 & 9 \\ 3 & -1 & 4 & 5 & x+1 \end{vmatrix} = (x-8) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} x+3 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & x-4 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & x+1 & 9 \\ 3 & -1 & 5 & x+1 \end{vmatrix} \\
& = (x-8) \begin{vmatrix} x+6 & 0 & 0 & x+6 \\ 0 & x-6 & -(x-6) & 0 \\ 0 & 2 & x+1 & 9 \\ 3 & -1 & 5 & x+1 \end{vmatrix} \\
& = (x-8) \begin{vmatrix} x+6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & x+3 & 9 \\ 3 & -1 & 4 & x-2 \end{vmatrix} \\
& = (x-8) \begin{vmatrix} x+6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-6 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & x+7 & x+7 \\ 3 & -1 & 4 & x-2 \end{vmatrix} \\
& = (x-8) \begin{vmatrix} x+6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-6 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & x+7 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & x-6 \end{vmatrix} \\
& = (x-8)(x+6)(x-6)(x+7)(x-6) \\
& = (x+7)(x+6)(x-6)^2(x-8).
\end{aligned}$$

□

7

(1) : $(a+1)^2(a^2-a+1)^2$

□

(2) : $a \neq -1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ (i : 虚数単位)

□

(3) : $A^{-1} = \frac{1}{(a+1)(a^2-a+1)} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

□

(4) : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{(a+1)(a^2-a+1)} \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ -(a-1) \end{pmatrix}$

□