理学部応用化学科 数学 1 及び演習 (担当：飯田)

**2014 年度 前期到達度評価試験** 実施日 2014 年 8 月 4 日 (月)

$n$ を正の整数とする．以下の問いに答えよ．

$\boxed{1}$ $n$ 次正方行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ に対して，$A$, $B$ を下三角行列とするとき，$AB$ も下三角行列になることを示せ．ただし，講義で用いた方法と同様の方法を用いることにより解答せよ．

$\boxed{2}$ $A = (a_{ij})$ を全ての成分が実数である $n$ 次正方行列とする．このとき，$A^2 = -E$ を満たす対称行列 $A$ は存在しないことを示せ．

$\boxed{3}$ $\begin{vmatrix} x-\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & x-1 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & x-\sqrt{3} \end{vmatrix}$ を因数分解せよ．

$\boxed{4}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & a & -6 \\ -3 & -6 & a \end{pmatrix}$ とするとき，$A$ が正則であるための $a$ に関する必要十分条件を求めよ．さらに，この条件のもとで $A$ の逆行列を求めよ．

$\boxed{5}$ $A$ を 3 次正方行列とする．連立 1 次方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -8\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

**(1)** この連立 1 次方程式が自明でない解をもつための必要十分条件を，$A$ を用いて 3 つ答えよ．

**(2)** $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$ とする．この連立 1 次方程式が自明でない解をもつための，$a$ に関する必要十分条件を求めよ．

$\boxed{6}$ 次の連立 1 次方程式を，掃き出し法を用いて解け．

**(1)** $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 8x_5 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$

**(2)** $\begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ -x + 2y - 5z = -8 \\ x + y + (a+6)z = b-6 \end{cases}$ ただし，$a$, $b$ を定数とする．

# 2014 年度前期到達度評価試験の略解

$\boxed{1}$

$A, B$ は下三角行列であるから，$a_{ik} = 0$ ($i < k$ のとき), $b_{kj} = 0$ ($j > k$ のとき).
従って $i < j$ のとき，

$$\begin{aligned}
AB \text{ の } (i,j) \text{ 成分} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\
&= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{i,j-1}b_{j-1,j} + a_{ij}b_{jj} + a_{i,j+1}b_{j+1,j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \\
&= a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + \cdots + a_{i,j-1} \cdot 0 + 0 \cdot b_{jj} + 0 \cdot b_{j+1,j} + \cdots + 0 \cdot b_{nj} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

よって $AB$ のどの列においても，対角成分より上の成分は全て 0 となるから，$AB$ も下三角行列になる. □

$\boxed{2}$

方針:$A^2 = -E$ を満たす対称行列 $A$ が存在することを仮定し，$A^2$ の $(1,1)$ 成分と $-E$ の $(1,1)$ 成分を比較することにより，矛盾を導く. □

$\boxed{3}$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x-\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & x-1 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & x-\sqrt{3} \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} x+1-\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & x-1 & -\sqrt{2} \\ x+1-\sqrt{3} & \sqrt{3} & x-\sqrt{3} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+1-\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & x-1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2}+\sqrt{3} & x-1-\sqrt{3} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{2} & 1 \\ 0 & x-1-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & x-1-\sqrt{2} & x-1-\sqrt{3} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{2} & 1 \\ 0 & x-1-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & x-1+\sqrt{2}-\sqrt{3} \end{vmatrix} \\
&= \left(x+1-\sqrt{3}\right)\left(x-1-\sqrt{2}\right)\left(x-1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right) \\
&= \left(x+1-\sqrt{3}\right)\left(x-1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(x-1-\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

□

$\boxed{4}$

$a$ に関する必要十分条件は，$a \neq 4, 9$.

$A$ の逆行列は $\dfrac{1}{(a-4)\,(a-9)}\begin{pmatrix} (a+6)(a-6) & -2(a-9) & 3(a-4) \\ -2(a-9) & a-9 & 0 \\ 3(a-4) & 0 & a-4 \end{pmatrix}$.

$\square$

$\boxed{5}$

**(1)** : 教科書またはノート参照. $\square$

**(2)** : $a = -4, 8$. $\square$

$\boxed{6}$

**(1)** : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t_1,\, t_2$ : 任意定数$)$.

$\square$

**(2)** : $\begin{cases} a \neq -7 \text{ のとき，} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{a+7}\begin{pmatrix} 2a-b+19 \\ -3a+2b-31 \\ b-5 \end{pmatrix}. \\ a = -7 \text{ かつ } b = 5 \text{ のとき，} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t : \text{任意定数}). \\ a = -7 \text{ かつ } b \neq 5 \text{ のとき，} & \text{解なし.} \end{cases}$

$\square$