2015 年度後期中間試験

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ を $\boldsymbol{R}^4$ の基底とし，f を次の対応をもつ $\boldsymbol{R}^4$ 上の線形変換とする．

$f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_4,\ f(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3,\ f(\boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3,\ f(\boldsymbol{u}_4) = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4$

このとき，次の問に答えよ．

(1) 線形独立であるとはどういうことかを説明せよ．

(2) 次のベクトルが線形独立であるかどうかを調べよ．

(i) $f(\boldsymbol{u}_1),\ f(\boldsymbol{u}_2),\ f(\boldsymbol{u}_3)$

(ii) $f(\boldsymbol{u}_1),\ f(\boldsymbol{u}_2),\ f(\boldsymbol{u}_3),\ f(\boldsymbol{u}_4)$

(3) $f(\boldsymbol{R}^4) =< f(\boldsymbol{u}_1),\ f(\boldsymbol{u}_2),\ f(\boldsymbol{u}_3),\ f(\boldsymbol{u}_4) >$ の次元と基底を求めよ．

(4) 線形変換であるとはどういうことかを説明せよ．

(5) $f(\boldsymbol{u}_4 - \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)$ を計算せよ．

(6) 授業で扱った次元定理を書け．

(7) $f^{-1}(\boldsymbol{0})$ の次元と基底を求めよ．

(8) 部分空間であるとはどういうことかを説明せよ．

(9) $f^{-1}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4)$ が $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間ではないことを証明せよ．

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

$W_1 =< \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 >, W_2 =< \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_6 >, A = (\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{a}_4)$ とする．

このとき次の問に答えよ．

(1) W_1 の次元と基底を求めよ．

(2) W_2 の次元と基底を求めよ．

(3) $W_1 \cap W_2$ の次元と基底を求めよ．

(4) $W_3 = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4 : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の次元と基底を求めよ．

(5) $W_4 = \{A\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4\}$ の次元と基底を求めよ．

2015 年度後期中間試験解答

$\boxed{1}$

(1), (4), (6), (8)：略

(2)：(i) $c_1 f(\boldsymbol{u}_1) + c_2 f(\boldsymbol{u}_2) + c_3 f(\boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{0}$ とする．これを

$$(c_1 + c_3)\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + (c_2 + c_3)\boldsymbol{u}_3 + c_1\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{0}$$

と書きなおすと，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ が線形独立であることから

$$c_1 + c_3 = c_2 = c_2 + c_3 = c_1 = 0$$

となる．これより $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となるので，$f(\boldsymbol{u}_1)$，$f(\boldsymbol{u}_2)$，$f(\boldsymbol{u}_3)$ は線形独立である．

(ii) $c_1 f(\boldsymbol{u}_1) + c_2 f(\boldsymbol{u}_2) + c_3 f(\boldsymbol{u}_3) + c_4 f(\boldsymbol{u}_4) = \boldsymbol{0}$ — $(*)$ とする．これを

$$(c_1 + c_3 + c_4)\boldsymbol{u}_1 + (c_2 + c_4)\boldsymbol{u}_2 + (c_2 + c_3 + c_4)\boldsymbol{u}_3 + (c_1 + c_4)\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{0}$$

と書きなおすと，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ が線形独立であることから

$$c_1 + c_3 + c_4 = c_2 + c_4 = c_2 + c_3 + c_4 = c_1 + c_4 = 0$$

となる．よって例えば，$c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 0, c_4 = -1$ で $(*)$ が成り立つので，
$f(\boldsymbol{u}_1)$，$f(\boldsymbol{u}_2)$，$f(\boldsymbol{u}_3)$，$f(\boldsymbol{u}_4)$ は線形従属である．

(3)：**(2)** より $\dim f(\boldsymbol{R}^4) = 3$ で $f(\boldsymbol{R}^4)$ の基底として $f(\boldsymbol{u}_1)$，$f(\boldsymbol{u}_2)$，$f(\boldsymbol{u}_3)$ がとれる．

(5)：$f(\boldsymbol{u}_4 - \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) = f(\boldsymbol{u}_4) - f(\boldsymbol{u}_1) - f(\boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4) - (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_4) - (\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{0}$

(7)：次元定理と **(3)** より $\dim f^{-1}(\boldsymbol{0}) = \dim \boldsymbol{R}^4 - \dim f(\boldsymbol{R}^4) = 1$.

(5) より $\boldsymbol{u}_4 - \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \in f^{-1}(\boldsymbol{0})$.

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ が線形独立であることから $\boldsymbol{u}_4 - \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \neq \boldsymbol{0}$.

以上より $f^{-1}(\boldsymbol{0})$ の次元は 1 で基底として $\boldsymbol{u}_4 - \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ がとれる．

(9)：$f^{-1}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4)$ が $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間であると仮定する．

このとき，$\boldsymbol{u}_4 \in f^{-1}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4)$ より，$f^{-1}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4)$ が部分空間であることから

$2\boldsymbol{u}_4 \in f^{-1}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4)$，すなわち $f(2\boldsymbol{u}_4) = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4$ となる．

また，f は線形変換であることから $f(2\boldsymbol{u}_4) = 2f(\boldsymbol{u}_4) = 2(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4)$ となるので，

$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4 = 2(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4)$，

すなわち，$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4 = 0$ となるが，これは $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ が線形独立であることに矛盾．

$\boxed{2}$

(1) $\dim W_1 = 3$． W_1 の基底として，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ がとれる．

(2) $\alpha = 0$ の場合：$\dim W_2 = 2$． W_2 の基底として，$\{\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_6\}$ がとれる．

$\alpha \neq 0$ の場合：$\dim W_2 = 3$． W_2 の基底として，$\{\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_6\}$ がとれる．

(3) $\alpha = 0$ の場合：$\dim W_1 \cap W_2 = 1$． $W_1 \cap W_2$ の基底として，$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ がとれる．

$\alpha \neq 0$ の場合：$\dim W_1 \cap W_2 = 2$． $W_1 \cap W_2$ の基底として，$\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ がとれる．

(4) $\dim W_3 = 1$． W_3 の基底として，$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ がとれる．

(5) $\dim W_4 = 3$． W_4 の基底として，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ がとれる．