

1 次の問に答えよ.

(1) 固有値, 固有ベクトルの定義をかけ.

(2) 内積の定義をかけ.

(3) ベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r\}$ が正規直交系であるとはどういうことかを説明せよ.

2 $A = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & -x \end{pmatrix}$ とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A が対角化可能であるかどうかを調べよ.

3 $Q(\mathbf{x}) = 3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2zx = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ とする ($\mathbf{x} = {}^t(x, y, z)$). このとき, 次の問に答えよ.

(1) A を求めよ.

(2) A の固有値をすべて求めよ.

(3) A を直交行列 P により対角化せよ. また, 行列 P を求めよ.

(4) 2 次形式 $Q(\mathbf{x})$ の標準系を求めよ.

(5) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のとき, $3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2zx$ の最大値と最小値を求めよ.

1 略

2

(1) $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)\lambda^2$ より, A の固有値は 0 と 1 である.(2) $\lambda = 1$ の重複度は 1 なので, $\lambda = 0$ に対してのみ調べればよい.Case 1. $x = 0$ の場合 $\text{rank}(0E - A) = 1$ より, $(0E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度は 2.よって, 重複度と解の自由度が等しいので A は対角化可能.Case 2. $x \neq 0$ の場合 $\text{rank}(0E - A) = 2$ より, $(0E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度は 1.よって, 重複度と解の自由度が異なるので, A は対角化できない.

3

(1)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$ より, A の固有値は 1, 2, 4.

(3)
$$P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(4) $\mathbf{y} = {}^t(y_1, y_2, y_3)$ とすると, $Q(P\mathbf{y}) = y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2$.(5) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のとき, $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$.よって, $y_1^2 = X, y_2^2 = Y, y_3^2 = Z$ とおくと,この問題は $X + Y + Z = 1$ ($X, Y, Z \geq 0$) のもとで $X + 2Y + 4Z$ の最大値・最小値を求める問題に置き換えることができる. $X + 2Y + 4Z = k$ とおく. $X + 2Y + 4Z = k$ と $X + Y + Z = 1$ ($X, Y, Z \geq 0$) が共有点を持つような k の範囲は $1 \leq k \leq 4$.

よって求める最大値は 4, 最小値は 1 である.