

前期中間試験

1 n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して, 次の問に答えよ.

(1) 次の用語の説明を A を用いてせよ. (各 5 点)

(i) 対称行列 (ii) 直交行列 (iii) 正則行列 (iv) 対角行列

(2) A が任意の n 次正方行列と可換であるとき, $A = \alpha E$ (α は実数) と表せることを示せ. (10 点)

(ヒント: (k, l) 成分が 1, その他の成分が 0 である行列を E_{kl} として利用する)

(3) A が直交行列であるとき, $\text{tr}((A + E)({}^t A - E))$ の値を求めよ. (10 点)

(4) $A^n = O$ であるとき, $E - A$ が正則行列であることを示せ. (10 点)

(ヒント: $(1 - x)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = 1 - x^n$ を利用する)

2 $2k + 1$ 次正方行列

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & x \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & 1 & 0 & x & \cdots & & \\ & & \cdots & 0 & x & 0 & \cdots & & \\ & & \cdots & x & 0 & 1 & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & x & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ x & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して, 次の問に答えよ. (各 10 点)

(1) $|A_1|$ を計算せよ.

(2) $|A_k|$ を漸化式を用いて計算せよ.

3 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問に答えよ. (各 10 点)

(1) A が正則であるための必要十分条件を求めよ.

(2) A が正則のとき, A の逆行列を求めよ.

(3) A が正則のとき, 次の連立 1 次方程式をクラメルの公式を用いて解け.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2015 年度前期中間試験の略解

1

(1): 教科書またはノート参照. □(2): AE_{kl} の (i, j) 成分は, $j \neq l$ のとき 0, $j = l$ のとき a_{ik} . $E_{kl}A$ の (i, j) 成分は, $i \neq k$ のとき 0, $i = k$ のとき a_{lj} .よって $AE_{kl} = E_{kl}A$ より, $i \neq k$ のとき $a_{ik} = 0$, $a_{kk} = a_{ll}$ となる.以上より, $A = \alpha E$ と書けることが分かる. □(3): $\text{tr}((A + E)({}^tA - E)) = \text{tr}(A {}^tA - A + {}^tA - E) = \text{tr}({}^tA - A) = \text{tr } {}^tA - \text{tr } A = 0$ □(4): $(E - A)(A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + A + E) = E - A^n = E$ より $E - A$ は正則であることが分かる. □

2

(1): $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より, $|A_1| = x(1 - x^2)$ □(2): $|A_k| = (1 - x^2)|A_{k-1}|$ より, $|A_k| = x(1 - x^2)^k$ □

3

(1): $|A| = (a - 1)^2(2a + 1)$ より, $a \neq -1/2, 1$ □(2): $A^{-1} = \frac{1}{(a - 1)(2a + 1)} \begin{pmatrix} -a - 1 & a & a \\ a & -a - 1 & a \\ a & a & -a - 1 \end{pmatrix}$ □(3): $x = \frac{1}{(a - 1)^2(2a + 1)} \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2a + 1}$ 対称性より, $y = \frac{1}{2a + 1}, z = \frac{1}{2a + 1}$ □