2016 年度後期中間試験

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ を $\boldsymbol{R}^4$ の基底とし，f を次の対応をもつ $\boldsymbol{R}^4$ 上の線形変換とする．

- $f(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4) = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_4$,
- $f(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$,
- $f(\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{u}_4$,
- $f(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4$

このとき，次の問に答えよ．(各 10 点)

(1) $f(\boldsymbol{u}_1),\ f(\boldsymbol{u}_2),\ f(\boldsymbol{u}_3),\ f(\boldsymbol{u}_4)$ を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ を用いて表せ．

(2) 次のベクトルが線形独立であるかどうかを調べよ．

(i) $f(\boldsymbol{u}_1),\ f(\boldsymbol{u}_3),\ f(\boldsymbol{u}_4)$

(ii) $f(\boldsymbol{u}_1),\ f(\boldsymbol{u}_2),\ f(\boldsymbol{u}_3),\ f(\boldsymbol{u}_4)$

(3) $f(\boldsymbol{R}^4) =< f(\boldsymbol{u}_1),\ f(\boldsymbol{u}_2),\ f(\boldsymbol{u}_3),\ f(\boldsymbol{u}_4) >$ の次元と基底を求めよ．

(4) $f^{-1}(\boldsymbol{0})$ の次元と基底を求めよ．

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

$W_1 =< \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 >, W_2 =< \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_6 >, A = (\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{a}_4)$ とする．
このとき，次の問に答えよ．(各 10 点)

(1) W_1 の次元と基底を求めよ．

(2) W_2 の次元と基底を求めよ．

(3) $W_1 \cap W_2$ の次元と基底を求めよ．

(4) $W_3 = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4 : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の次元と基底を求めよ．

(5) $W_4 = \{A\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4\}$ の次元と基底を求めよ．

2016 年度後期中間試験解答

$\boxed{1}$ (1) $f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$, $f(\boldsymbol{u}_2) = 0$, $f(\boldsymbol{u}_4) = \boldsymbol{u}_4$, $f(\boldsymbol{u}_4) = -\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3$

(2) （証明は略）(i) 線形独立　(ii) 線形従属

(3) 次元 3，基底 $\{f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_3), f(\boldsymbol{u}_4)\}$

(4) 次元 1，基底 $\boldsymbol{u}_2$

$\boxed{2}$ (1) $\dim W_1 = 3$．W_1 の基底として，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ がとれる．

(2) $\dim W_2 = 3$．W_2 の基底として，$\{\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_6\}$ がとれる．

(3) W_1 は $x + y - z - w = 0$ 上の頂点集合，W_2 は $x - z = 0$ 上の頂点集合．
よって，$\dim (W_1 \cap W_2) = 2$．$W_1 \cap W_2$ の基底として，$\{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ がとれる．

(4) $\dim W_3 = 1$．W_3 の基底として，$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

(5) $\dim W_4 = 3$．W_4 の基底として，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ がとれる．