

1 $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & x \end{pmatrix}$ とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) A の固有値をすべて求めよ.
- (2) A が対角化可能であるかどうかを調べよ.

2 $Q(\boldsymbol{x}) = 2xy + 2xz - 2yz = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ とする ($\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z)$). このとき, 次の問に答えよ.

- (1) A を求めよ.
- (2) A の固有値をすべて求めよ.
- (3) A を直交行列 P により対角化せよ. また, 行列 P を求めよ.
- (4) 2 次形式 $Q(\boldsymbol{x})$ の標準系を求めよ.
- (5) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のとき, $2xy + 2xz - 2yz$ の最大値と最小値を求めよ.

3 2 次正方行列 A に対して $A^2 - 3A + 2E = O$ が成り立つとする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) λ を A の固有値とすると, $\lambda \in \{1, 2\}$ であることを示せ.
- (2) 固有値, 固有ベクトルの定義をかけ.
- (3) A が対角化可能であることを示せ.

- 1 (1) $|\lambda E - A| = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2x)$ より, A の固有値は 0 と 1 と $2x$ である.

(2) 解答 1: A は対称行列なので対角化可能.

解答 2:

Case 1. $x \neq 0, 1/2$ の場合

全ての固有値が異なるので A は対角化可能.

Case 2. $x = 0$ の場合

$\text{rank}(0E - A) = 1$ より, $(0E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度は 2.

よって, 重複度と解の自由度が等しいので, A は対角化可能.

Case 3. $x = 1/2$ の場合

$\text{rank}(1E - A) = 1$ より, $(1E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度は 2.

よって, 重複度と解の自由度が等しいので, A は対角化可能.

2 (1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$ より, A の固有値は $1, -2$.

(3) $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(4) $\mathbf{y} = {}^t(y_1, y_2, y_3)$ とすると, $Q(P\mathbf{y}) = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$.

(5) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のとき, $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$.

よって, $y_1^2 = X, y_2^2 = Y, y_3^2 = Z$ とおくと,

この問題は $X + Y + Z = 1$ ($X, Y, Z \geq 0$) のもとで

$X + Y - 2Z$ の最大値・最小値を求める問題に置き換えることができる.

$X + Y - 2Z = k$ とおく.

$X + Y - 2Z = k$ と $X + Y + Z = 1$ ($X, Y, Z \geq 0$) が

共有点を持つような k の範囲は $-2 \leq k \leq 1$.

よって求める最大値は 1 , 最小値は -2 である.

- 3 (1) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ とすると, フロベニウスの定理より,

$f(\lambda)$ は $f(A) = O$ の固有値.

$f(A)$ の固有値は 0 なので, $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$.

よって, $\lambda \in \{1, 2\}$ であることが分かる.

(2) 略

(3) $A = E$ の場合と $A = 2E$ の場合は明らかに対角化可能なので, $A \notin \{E, 2E\}$ とする.

$A \neq E$ より, $(A - E)\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ である $\mathbf{x}$ が存在し,

$A \neq 2E$ より, $(A - 2E)\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ である $\mathbf{y}$ が存在する.

このことと,

$$A((A - E)\boldsymbol{x}) = 2((A - E)\boldsymbol{x}), A((A - 2E)\boldsymbol{x}) = ((A - 2E)\boldsymbol{x}) \text{ より,}$$

1 と 2 が共に A の固有値であることが分かる.

よって, 全ての固有値が異なるので A が対角化可能であることが分かる.