

前期中間試験

1 n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して, 次の問に答えよ. ただし n は奇数とする.

(1) A が全ての成分が整数である直交行列であるとき, $|A|$ を求めよ.

(2) $|A| = 2$ のとき, $|-2A^2|$ を求めよ.

(3) A が次の 2 つの条件を満たすとき, $\text{tr}(A^t A)$ の値を求めよ.

条件 1 A の成分は 1 または 0 である.

条件 2 A の各行の和は m である ($\therefore \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = m$).

(4) $A^n = O$ であるとき, $E + A$ が正則行列であることを示せ.

ヒント: $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) = 1-x^n$

(5) A が交代行列ならば, A が正則行列ではないことを示せ.

2 n 次正方行列 $A_n = (a_{ij})$ を次のように定める.

- $1 \leq i \leq n-1$ に対し, $a_{ii} = 2$,
- $a_{nn} = m$,
- $|i-j| = 1$ となる $1 \leq i, j \leq n$ に対し, $a_{ij} = -1$,
- その他の $1 \leq i, j \leq n$ に対し, $a_{ij} = 0$.

このとき, 次の問に答えよ.

(1) $|A_2|$ を求めよ.

(2) $|A_3|$ を求めよ.

(3) A_3 が正則のとき, A_3 の逆行列を求めよ.

(4) A_3 が正則のとき, 次の連立 1 次方程式をクラメルの公式を用いて解け.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(5) $|A_n|$ を求めよ.

2016 年度前期中間試験の略解

1 (1) 1 または -1

(2) -2^{n+2}

(3) mn

(4) $(E + A)(E - A + A^2 - \cdots - A^{n-2} + A^{n-1}) = E + A^n = E$ より, $E + A$ は正則

(5) A が交代行列であることから, ${}^tA = -A$, すなわち $|{}^tA| = |-A|$.

$|{}^tA| = |A|$, $|-A| = (-1)^n|A| = -|A|$ なので, $|A| = 0$.

よって, A は行列式の値が 0 なので正則ではない.

2 (1) $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix}$ より, $|A_2| = 2m - 1$.

(2) $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$ より, $|A_3| = 3m - 2$.

(3) $|A_3| \neq 0$ より, A は $m \neq 2/3$ のとき正則.

$A_{1,1} = 2m - 1, A_{2,1} = m, A_{3,1} = 1$

$A_{1,2} = m, A_{2,2} = 2m, A_{3,2} = 2$

$A_{1,3} = 1, A_{2,3} = 2, A_{3,3} = 3$ より,

$$A^{-1} = \frac{1}{3m-2} \begin{pmatrix} 2m-1 & m & 1 \\ m & 2m & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(4) $x = \frac{3m}{3m-2}, y = \frac{3m+2}{3m-2}, z = \frac{6}{3m-2}$

(5) $|A_n| = 2|A_{n-1}| - |A_{n-2}|$ より,

$|A_n| - |A_{n-1}| = |A_{n-1}| - |A_{n-2}| = \cdots = |A_3| - |A_2| = m - 1$.

よって

$$|A_n| = |A_2| + (m-1)(n-2) = 2m-1 + (m-1)(n-2) = (m-1)n + 1$$