2017 年度後期中間試験

注意：各 10 点．答案用紙の表に問 1，裏に問 2 の解答を書くこと．解答は答えのみでもよい．

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ を $\boldsymbol{R}^4$ の基底とし，f を次の対応をもつ $\boldsymbol{R}^4$ 上の線形変換とする．

- $f(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4) = \boldsymbol{0}$,
- $f(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4$,
- $f(\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{0}$,
- $f(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3) = 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4$

このとき，次の問に答えよ．

(1) $f(\boldsymbol{u}_1)$, $f(\boldsymbol{u}_2)$, $f(\boldsymbol{u}_3)$, $f(\boldsymbol{u}_4)$ を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ を用いて表せ．

(2) $\{f(\boldsymbol{u}_1),\ f(\boldsymbol{u}_2),\ f(\boldsymbol{u}_3),\ f(\boldsymbol{u}_4)\}$ の中からできるだけ多くの線形独立なベクトルの組を選べ．

(3) $f(\boldsymbol{R}^4)$ の次元と基底を求めよ．

(4) $f^{-1}(\boldsymbol{0})$ の次元と基底を求めよ．

(5) $f(f(\boldsymbol{R}^4))$ の次元と基底を求めよ．

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$
$W_1 =< \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 >, W_2 =< \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_6 >, A = (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_4)$ とする．
このとき，次の問に答えよ．

(1) W_1 の次元と基底を求めよ．

(2) W_2 の次元と基底を求めよ．

(3) $W_1 \cap W_2$ の次元と基底を求めよ．

(4) $W_3 = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4 : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の次元と基底を求めよ．

(5) $W_4 = \{A\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4\}$ の次元と基底を求めよ．

2017年度後期中間試験解答

$\boxed{1}$ (1) $f(\boldsymbol{u}_1)=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3+\boldsymbol{u}_4$, $f(\boldsymbol{u}_2)=\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2$, $f(\boldsymbol{u}_3)=\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1$, $f(\boldsymbol{u}_4)=-\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u}_4$

(2) （証明略）例えば，$\{f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2)\}$

(3) （証明略）次元 2，基底 $\{f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2)\}$

(4) （証明略）次元 2，基底 $\{\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3+\boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3\}$

(5) $f(f(\boldsymbol{u}_1))=\boldsymbol{0}$, $f(f(\boldsymbol{u}_2))=2\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3+\boldsymbol{u}_4$, $f(f(\boldsymbol{u}_3))=-2\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u}_4$, $f(f(\boldsymbol{u}_4))=\boldsymbol{0}$ より，
次元 1，基底 $\{2\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3+\boldsymbol{u}_4\}$

$\boxed{2}$ (1) $\dim W_1=3$．W_1 の基底として，$\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$ がとれる．

(2) $\dim W_2=3$．W_2 の基底として，$\{\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_6\}$ がとれる．

(3) W_1 は $x+y-2w=0$ 上の頂点集合，W_2 は $x+y=0$ 上の頂点集合．
よって，$\dim (W_1\cap W_2)=2$．$W_1\cap W_2$ の基底として，$\{\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\}$ がとれる．

(4) $\dim W_3=1$．W_3 の基底として，$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

(5) $\dim W_4=3$．W_4 の基底として，$\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$ がとれる．