

2017 年度後期期末試験

1 $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -2x \\ 1 & 1 & 1 \\ -x & 0 & 2x \end{pmatrix}$ とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ. (10 点)

(2) A が対角化可能であるかどうかを調べよ. (20 点)

2 $Q(\boldsymbol{x}) = \alpha x^2 + y^2 + \alpha z^2 - 2\alpha xz = {}^t \boldsymbol{x} A \boldsymbol{x}$ とする ($\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z)$). このとき, 次の問に答えよ.

(1) A を求めよ. (10 点)

(2) A の固有値をすべて求めよ. (10 点)

(3) A を直交行列 P により対角化せよ. また, 行列 P を求めよ. (20 点)

(4) 2 次形式 $Q(\boldsymbol{x})$ の標準系を求めよ. (10 点)

3 2 次正方行列 A に対して $A^2 - 4A + 3E = O$ が成り立つとする. このとき, λ を A の固有値とすると, $\lambda \in \{1, 3\}$ であることを示せ. (20 点)

- 1 (1) $|\lambda E - A| = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3x)$ より, A の固有値は 0 と 1 と $3x$ である.

Case 1. $x \neq 0, 1/3$ の場合

全ての固有値が異なるので A は対角化可能.

Case 2. $x = 0$ の場合

$\text{rank}(0E - A) = 1$ より, $(0E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度は 2 .

よって, 重複度と解の自由度が等しいので, A は対角化可能.

Case 3. $x = 1/3$ の場合

$\text{rank}(1E - A) = 1$ より, $(1E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度は 2 .

よって, 重複度と解の自由度が等しいので, A は対角化可能.

2 (1) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

- (2) $|\lambda E - A| = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2\alpha)$ より, A の固有値は $0, 1, 2\alpha$.

- (3) **Case 1.** $\alpha \neq 0, 1/2$ の場合

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad {}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

Case 2. $\alpha = 0$ の場合

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Case 3. $\alpha = 1/2$ の場合

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad {}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (4) **Case 1.** $\alpha \neq 0, 1/2$ の場合

$$Q(P\mathbf{y}) = y_2^2 + 2\alpha y_3^2.$$

Case 2. $\alpha = 0$ の場合

$$Q(P\mathbf{y}) = y_3^2.$$

Case 3. $\alpha = 1/2$ の場合

$$Q(P\mathbf{y}) = y_2^2 + y_3^2.$$

- 3 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ とすると,

フロベニウスの定理より, $f(\lambda)$ は $f(A) = O$ の固有値.

零行列の固有値は 0 のみなので, $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$.

よって, $\lambda \in \{1, 3\}$ であることが分かる.