

2017 年度前期中間試験

1 次の条件を満たす n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し、以下の間に答えよ。

条件 1 A は対称行列である。

条件 2 A の成分は 1 か 0 である。

条件 3 A の各行に要素が k 個ある

$$(\because \text{任意の } 1 \leq i \leq n \text{ に対して, } \sum_{1 \leq l \leq n} a_{il}^2 = k).$$

条件 4 A の任意の異なる 2 行に対して、1 が同時に現れる列が m 個ある

$$(\because \text{任意の異なる } 1 \leq i, j \leq n \text{ に対して, } \sum_{1 \leq l \leq n} a_{il}a_{jl} = m).$$

(1) $k = 2, m = 1, n = 3$ の場合の A の例を一つ書け。

(2) A^2 を書け。(ヒント: $A^2 = A^t A$)

(3) $|A| \geq 0$ とする。このとき、 $|A|$ の値を求めよ。

2 n 次正方行列 $A_n = (a_{ij})$ を次のように定める。

- $1 \leq i \leq n-1$ に対し、 $a_{ii} = 1$,
- $a_{nn} = m$,
- $i+j = n+1$ かつ $i \neq j$ である $1 \leq i, j \leq n$ に対し、 $a_{ij} = -1$,
- その他の $1 \leq i, j \leq n$ に対し、 $a_{ij} = 0$.

このとき、以下の間に答えよ。

(1) $|A_3|$ を求めよ。

(2) $m \geq 4$ のとき、 $|A_m|$ を求めよ。

(3) A_3 が正則のとき、 A_3 の逆行列を求めよ。

(4) A_3 が正則のとき、連立 1 次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を解け。

3 n 次正方行列 $A_n = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ に対し、 $|A_2|, |A_3|, |A_n|$ を求めよ。

2017 年度前期中間試験の略解

1 (1) 例 : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) 対角成分が k , それ以外の成分が m の行列

(3) $\sqrt{((n-1)m+k)(k-m)^{n-1}}$

2 (1) $m-1$

(2) 0

(3) $\frac{1}{m-1} \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\frac{1}{m-1} \begin{pmatrix} m+1 \\ m-1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3 $|A_2| = 12, |A_3| = 32, |A_n| = (n+1)2^n$