

2018 年度後期中間試験

注意：各 10 点．答案用紙の表に問 1，裏に問 2 の解答を書くこと．

1 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ を $\mathbf{R}^4$ の基底とし， f を次の対応をもつ $\mathbf{R}^4$ 上の線形変換とする．

- $f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3,$
- $f(\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4,$
- $f(\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4) = \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_1,$
- $f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4.$

このとき，次の問に答えよ．

注意 1：(1) と (5) の解答は答えのみでもよい．その他の解答は説明も書くこと．

注意 2： $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ を $\mathbf{R}^4$ の標準基底とする．

- (1) $f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), f(\mathbf{u}_3), f(\mathbf{u}_4)$ を $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ を用いて表せ．
- (2) $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), f(\mathbf{u}_3), f(\mathbf{u}_4)\}$ の中からできるだけ多くの線形独立なベクトルの組を選べ．
- (3) $f(\mathbf{R}^4)$ の次元と基底を求めよ．
- (4) $f^{-1}(\mathbf{0})$ の次元と基底を求めよ．
- (5) $\mathbf{u}_i = \mathbf{e}_i$ とする ($1 \leq i \leq 4$)．このとき， f を表す行列 A を求めよ．

2 $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

$W_1 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle, W_2 = \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6 \rangle, A = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4)$ とする．

このとき，次の問に答えよ．

注意：解答は答えのみでもよい．

- (1) W_1 の次元と基底を求めよ．
- (2) W_2 の次元と基底を求めよ．
- (3) $W_1 \cap W_2$ の次元と基底を求めよ．
- (4) $W_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ の次元と基底を求めよ．
- (5) $W_4 = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4\}$ の次元と基底を求めよ．

1 (1) $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, f(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4, f(\mathbf{u}_4) = \mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_1$

(2) (証明略) 例えば, $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), f(\mathbf{u}_3)\}$

(3) (証明略) 次元 3, 基底 $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), f(\mathbf{u}_3)\}$

(4) (証明略) 次元 1, 基底 $\{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4\}$

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2 (1) $\dim W_1 = 3$. W_1 の基底として, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ がとれる.

(2) $\dim W_2 = 3$. W_2 の基底として, $\{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_6\}$ がとれる.

(3) W_1 は $x - y + z - w = 0$ 上の頂点集合, W_2 は $y = 0$ 上の頂点集合.

よって, $\dim (W_1 \cap W_2) = 2$. $W_1 \cap W_2$ の基底として, $\{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ がとれる.

(4) $\dim W_3 = 1$. W_3 の基底として, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれる.

(5) $\dim W_4 = 3$. W_4 の基底として, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ がとれる.