2018 年度後期期末試験

$\boxed{1}$ $A = \begin{pmatrix} -x+2 & 0 & -2x+2 \\ 0 & 1 & 0 \\ x-1 & 0 & 2x-1 \end{pmatrix}$ とする（$x \neq 1$ とする）．このとき，次の問に答えよ．

∗ (1) は答えのみ書くこと．(2) は理由も書くこと．

(1) A の固有多項式を因数分解した形で書け．(10 点)

(2) A が対角化可能であるかどうかを調べよ．(10 点)

$\boxed{2}$ $Q(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2\alpha x_1 x_2 + 2\alpha x_1 x_3 + 2\alpha x_2 x_3 = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x}$ とする ($\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$)．このとき，次の問に答えよ．

∗ (1) と (2) と (4) は答えのみ書くこと．(3) は途中計算も書くこと．

(1) A を求めよ．(10 点)

(2) A の固有多項式を因数分解した形で書け．(10 点)

(3) A を直交行列 P により対角化せよ．また，行列 P を求めよ．(20 点)

(4) $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ とする ($\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2, y_3)$)．このとき，標準系 $Q(P\boldsymbol{y})$ を求めよ．(10 点)

$\boxed{3}$ 2 次正方行列 A に対して $A^2 - 4A + 3E = O$ が成り立つとする（ただし，$A \notin \{E, 3E\}$ とする）．このとき，次の問に答えよ．

∗ (1) と (2) は証明を書くこと．(3) は答えのみ書くこと．

(1) λ を A の固有値とすると，$\lambda \in \{1, 3\}$ であることを示せ．(10 点)

(2) 1 と 3 が共に A の固有値であることを示せ．(10 点)

(3) A が対称行列のとき，2 次形式 $F(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2)$) の標準系を求めよ．(10 点)

2018 年度後期期末試験略解

$\boxed{1}$ (1) $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - x)$

(2) rank $(1E - A) = 1$ より，$(1E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度は 2.

よって，重複度と解の自由度が等しいので，A は対角化可能.

$\boxed{2}$ (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 2 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 2 \end{pmatrix}$

(2) $|\lambda E - A| = (\lambda - 2 - 2\alpha)(\lambda - 2 + \alpha)^2$

(3) **Case 1.** $\alpha \neq 0$ の場合

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad {}^tPAP = \begin{pmatrix} 2+2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2-\alpha \end{pmatrix}$$

Case 2. $\alpha = 0$ の場合

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^tPAP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(4) **Case 1.** $\alpha \neq 0$ の場合

$$Q(P\boldsymbol{y}) = (2+2\alpha)y_1^2 + (2-\alpha)y_2^2 + (2-\alpha)y_3^2.$$

Case 2. $\alpha = 0$ の場合

$$Q(P\boldsymbol{y}) = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2.$$

$\boxed{3}$ (1),(2) 授業中のノート参照　　(3) $y_1^2 + 3y_2^2$