2018 年度前期中間試験

$\boxed{1}$ 次の条件を満たす $v \times b$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対し，以下の問に答えよ．

条件 1 A の成分は 1 か 0 である．

条件 2 A の各行に 1 が r 個ある

条件 3 A の各列に 1 が k 個ある

条件 4 A の任意の異なる 2 行に対して，1 が同時に現れる列が λ 個ある．

(1) $A\,{}^tA$ の型を書け

(2) $A\,{}^tA$ がどのような成分を持つ行列であるかを書け．

(3) $|A\,{}^tA| \geq 0$ であることを示せ．

$\boxed{2}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{pmatrix}$ に対して，次の問に答えよ．(a は実数とする．)

(1) $|A|$ を求めよ．

(2) A が正則であるための必要十分条件を求めよ．

(3) A が正則のとき，A の逆行列を求めよ．

(4) A が正則のとき，連立 1 次方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を解け．

$\boxed{3}$ n 次正方行列 $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，$|A_2|$, $|A_3|$, $|A_n|$ を求めよ．

2018 年度前期中間試験の略解

$\boxed{1}$ **(1)** v 次正方行列

(2) 対角成分が r，それ以外の成分が λ の行列

(2) $|A\ {}^tA| = (r + (v-1)\lambda)(r-\lambda)^{v-1}$.

よって，条件 2 と条件 4 より，$r \geq \lambda$ であることから $|A\ {}^tA| \geq 0$ が分かる．

$\boxed{2}$ **(1)** $-(a^2+a+1)^2(a-1)^2$

(2) $a \neq 1$

(3) $\dfrac{1}{1-a^3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & -a & 1 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\dfrac{1}{1+a+a^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ $|A_2| = 3$, $|A_3| = 5$, $|A_n| = (2^{n+1} - (-1)^{n+1})/3$