

2018 年度前期期末試験

- 1 次の条件を満たす $v \times b$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対し、以下の問に答えよ。

条件 1 A の成分は 1 か 0 である。

条件 2 A の各行に 1 が r 個ある ($r \geq 1$)。

条件 3 A の任意の異なる 2 行に対して、1 が同時に現れる列が λ 個ある。

(1) $A^t A$ の階数を求めよ。(15 点)

(2) A の階数を求めよ。(15 点)

- 2 実数 m と行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{pmatrix}$ に対し、以下の問に答えよ。

(1) A の階数を求めよ。(15 点)

(2) $|A|$ を計算せよ。(10 点)

(3) A が正則であるための条件を求めよ。また、行基本変形をすることで A^{-1} を求めよ。(15 点)

(4) 同次連立 1 次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解を求めよ。(15 点)

(5) 連立 1 次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+1 \end{pmatrix}$ の解を求めよ。(15 点)

2018 年度前期期末試験の略解

1 (1)

 $A^t A$ は対角成分が r でその他の成分が λ の v 次正方行列なので, $r = \lambda$ の場合: $\text{rank } A^t A = 1$ $r \neq \lambda$ の場合: $\text{rank } A^t A = v$

(2)

 $r = \lambda$ の場合: A の全ての行が一致するので, $\text{rank } A = 1$ $r \neq \lambda$ の場合: A の階数が v 未満であると仮定する.このとき, ある v 次正則行列 P によって PA の v 行目を全て 0 にすることができる.よって $PA^t A$ の v 行目が全て 0 となるので $PA^t A$ が正則ではないことが分かる.一方, (1) より $r \neq \lambda$ のとき $A^t A$ は正則なので $PA^t A$ も正則となり矛盾.よって, $\text{rank } A = v$.

2 (1)

 $m = 1$ のとき, $\text{rank } A = 1$ $m \neq 1$ のとき, $\text{rank } A = 3$ (2) $-(m^2 + m + 1)^2(m - 1)^2$ (3) A が正則であるための条件は $m \neq 1$

$$A^{-1} = \frac{1}{1 - m^3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & -m & 1 \\ -m & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(4)

$$m = 1 \text{ のとき, } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$m \neq 1 \text{ のとき, } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(5)

 $m = 1$ のとき, 解なし

$$m \neq 1 \text{ のとき, } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{m^3 - 1} \begin{pmatrix} m^2 \\ m^2 - m - 1 \\ m^2 - m \end{pmatrix}$$