2019 年度後期中間試験

注意：各 10 点．答案用紙の表に問 1，裏に問 2 の解答を書くこと．

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ を $\boldsymbol{R}^4$ の基底とし，f を次の対応をもつ $\boldsymbol{R}^4$ 上の線形変換とする．

- $f(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2}$,
- $f(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{u_2} - \boldsymbol{u_3}$,
- $f(\boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_4) = -\boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2} - 2\boldsymbol{u_4}$,
- $f(2\boldsymbol{u}_4 - \boldsymbol{u_1}) = \boldsymbol{u_1} + 2\boldsymbol{u_2} + 2\boldsymbol{u_3} + 5\boldsymbol{u_4}$.

このとき，次の問に答えよ．
注意 1：(2) の解答は説明も書くこと．その他の解答は答えのみでもよい．
注意 2：$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ を $\boldsymbol{R}^4$ の標準基底する．

(1) $f(\boldsymbol{u}_1)$, $f(\boldsymbol{u}_2)$, $f(\boldsymbol{u}_3)$, $f(\boldsymbol{u}_4)$ を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ を用いて表せ．

(2) $\{f(\boldsymbol{u}_1),\ f(\boldsymbol{u}_2),\ f(\boldsymbol{u}_3),\ f(\boldsymbol{u}_4)\}$ の中からできるだけ多くの線形独立なベクトルの組を選べ．

(3) $f(\boldsymbol{R}^4)$ の次元と基底を求めよ．

(4) $f^{-1}(\boldsymbol{0})$ の次元と基底を求めよ．

(5) $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{e}_i$ とする（$1 \leq i \leq 4$）．このとき，f を表す行列 A を求めよ．

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$
$W_1 =< \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 >, W_2 =< \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5 >, A = (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_4)$ とする．
このとき，次の問に答えよ．
注意：解答は答えのみでもよい．

(1) W_1 の次元と基底を求めよ．

(2) W_2 の次元と基底を求めよ．

(3) $W_1 \cap W_2$ の次元と基底を求めよ．

(4) $W_3 = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4 : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の次元と基底を求めよ．

(5) $W_4 = \{A\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4\}$ の次元と基底を求めよ．

2019 年度後期中間試験解答

$\boxed{1}$ (1) $f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_4$, $f(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_4$, $f(\boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4$, $f(\boldsymbol{u}_4) = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + 3\boldsymbol{u}_4$

(2) （証明略）例えば，$\{f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), f(\boldsymbol{u}_3)\}$

(3) 次元 3，基底 $\{f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), f(\boldsymbol{u}_3)\}$

(4) 次元 1，基底 $\{-\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4\}$

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ (1) $\dim W_1 = 3$. W_1 の基底として，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ がとれる.

(2) $\dim W_2 = 3$. W_2 の基底として，$\{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5\}$ がとれる.

(3) W_1 は $x + y + z - w = 0$ 上の頂点集合，W_2 は $x = 0$ 上の頂点集合.
よって，$\dim (W_1 \cap W_2) = 2$. $W_1 \cap W_2$ の基底として，$\{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ がとれる.

(4) $\dim W_3 = 1$. W_3 の基底として，$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる.

(5) $\dim W_4 = 3$. W_4 の基底として，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ がとれる.