2019 年度後期期末試験

$\boxed{1}$ $A = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x+y & 0 \\ x & 0 & y \end{pmatrix}$ とする（$xy \neq 0$ とする）．このとき，次の問に答えよ．

＊ (1) は答えのみ書くこと．(2) は理由も書くこと．

(1) A の固有多項式を因数分解した形で書け．(10 点)

(2) A が対角化可能であるかどうかを調べよ（場合分けに注意）．(20 点)

$\boxed{2}$ $Q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ とする ($\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$)．このとき，次の問に答えよ．

＊ (1) と (2) と (4) は答えのみ書くこと．(3) は途中計算も書くこと．

(1) A を求めよ．(10 点)

(2) A の固有多項式を因数分解した形で書け．(10 点)

(3) A を直交行列 P により対角化せよ．また，行列 P を求めよ．(20 点)

(4) $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ とする ($\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2, y_3)$)．このとき，標準系 $Q(P\boldsymbol{y})$ を求めよ．(10 点)

$\boxed{3}$ 零行列ではない n 次正方行列 A に対して $A^n = O$ が成り立つとする．このとき，次の問に答えよ．

＊ (1) は説明を書くこと．(2) は証明を書くこと．

(1) A の固有値を全て求めよ．(10 点)

(2) A が対角化可能ではないことを示せ．(10 点)

2019 年度後期期末試験略解

$\boxed{1}$ (1) $|\lambda E - A| = (\lambda - x - y)^2 \lambda$

(2) Case 1. $x + y = 0$

rank $(0E - A) = 1$ より，$(0E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度は 2.

よって，重複度と解の自由度が異なるので，A は対角化可能ではない.

Case 2. $x + y \neq 0$

rank $((x+y)E - A) = 1$ より，$((x+y)E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度は 2.

よって，重複度と解の自由度が等しいので，A は対角化可能.

$\boxed{2}$ (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $|\lambda E - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda + 4)$

(3) $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$，${}^tPAP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

(4) $Q(P\boldsymbol{y}) = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2$.

$\boxed{3}$ (1) 0（$\because$固有値が少なくとも 1 つ存在することと，フロベニウスの定理から分かる）

(2) A の固有値は 0 のみなので，A の固有多項式は $|\lambda E - A| = \lambda^n$.

$n - \mathrm{rank}A < n$ より，固有値 0 に対する A の固有空間の次元は n 未満

よって，重複度と固有空間の次元が異なるので，A は対角化可能ではない.