

2019 年度前期中間試験

1 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ とし, $B = A^t A$ とする. このとき次の問に答えよ.

(実数の範囲で因数分解できる場合は必ず因数分解すること. 答えのみを書くこと. 各 10 点)

(1) B を求めよ.

(2) $|A|$ を求めよ.

(3) $|B|$ を求めよ.

(4) A が正則であるための必要十分条件を求めよ.

(5) A が正則のとき, A の逆行列を求めよ.

(6) A が正則のとき, B の逆行列を求めよ.

(7) A が正則のとき, 連立 1 次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を解け.

2 次の $2n$ 次正方行列 A_{2n} と $(2n-1)$ 次正方行列 B_{2n-1} に対して, $|A_{2n}|$ と $|B_{2n-1}|$ を求めよ.

(途中計算を書くこと. 各 15 点)

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{2n-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2019 年度前期中間試験の略解

$$\boxed{1} \quad (1) \quad B = \begin{pmatrix} a^2 + 1 & 0 & a \\ 0 & (a+1)^2 & 0 \\ a & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad |A| = a^2(a+1)$$

$$(3) \quad |B| = a^4(a+1)^2$$

$$(4) \quad a \neq -1, 0$$

$$(5) \quad A^{-1} = \frac{1}{a^2(a+1)} \begin{pmatrix} a(a+1) & 0 & -(a+1) \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a(a+1) \end{pmatrix}$$

$$(6) \quad B^{-1} = \frac{1}{a^4(a+1)^2} \begin{pmatrix} a^2(a+1)^2 & 0 & -a(a+1)^2 \\ 0 & a^4 & 0 \\ -a(a+1)^2 & 0 & (a^2+1)(a+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$(7) \quad \begin{pmatrix} \frac{a-1}{a^2} \\ \frac{1}{a+1} \\ \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{2} \quad |B_{2n-1}| = |B_{2n-3}| = \cdots = |B_3| = 0,$$

$$|A_{2n}| = 2|B_{2n-1}| + |A_{2(n-1)}| = |A_{2(n-1)}| = \cdots = |A_2| = 1$$