理学部応用化学科 数学 1 及び演習

2019 年度前期期末試験

n を 2 以上の整数，a を実数とする．
このとき，次の条件を満たす n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し，以下の問に答えよ．

条件 1 $a_{i,i} = (-1)^{i-1}a \ (1 \leq i \leq n)$

条件 2 $a_{i,j} = (-1)^{i} \ (1 \leq i, j \leq n$ かつ $i \neq j)$

(1) A の階数を求めよ．

(2) A が正則であるための条件を求めよ．

(3) $n = 3$ で A が正則であるとき，A^{-1} を求めよ．

(4) $n = 3$ のとき，同次連立 1 次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解を求めよ．

(5) $n = 3$ のとき，連立 1 次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$ の解を求めよ．

2019 年度前期期末試験の略解

(1)

$a=-1$ のとき，rank $A=1$

$a=n-1$ のとき，rank $A=n-1$

$a\neq -1, n-1$ のとき，rank $A=n$

(2) $a\neq -1, n-1$

(3) $A^{-1}=\dfrac{1}{(a+1)(a-2)}\begin{pmatrix} a-1 & -1 & 1 \\ 1 & -(a-1) & 1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$

(4)

$a=-1$ のとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$a=2$ のとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$a\neq -1, 2$ のとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(5)

$a=-1, 2$ のとき，解なし

$a\neq -1, 2$ のとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\dfrac{1}{(a-2)(a+1)}\begin{pmatrix} a(a-1) \\ -a(a-3) \\ a(a-1) \end{pmatrix}$