

2020 年度後期期末試験

1 $A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x+y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+y & 0 \\ x & 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ とする. このとき, 次の間に答えよ.

* (1) は答えのみ書くこと. (2) は理由も書くこと.

(1) A の固有多項式を因数分解した形で書け. (10 点)

(2) 次の各場合において A が対角化可能であるかどうかを調べよ (各 10 点).

(i) $x + y = 0$ かつ ($x \neq 0$ または $y \neq 0$) の場合

(ii) $x = 0$ かつ $y = 0$ の場合

(iii) $x + y \neq 0$ の場合

2 2 次形式 $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$ の標準形を求めよ. (20 点)

* 答えのみ書くこと.

3 m と n を $1 \leq m \leq n$ である整数とする. A を $m \times n$ 行列, B を $n \times m$ 行列とする. AB は正則で対角化可能であるとする. $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ を線形独立な AB の固有ベクトルとする. f と g をそれぞれ A と B によって表される線形写像とする. このとき, 以下の間に答えよ. (各 10 点)

(1) $B\mathbf{x}_1, B\mathbf{x}_2, \dots, B\mathbf{x}_m$ が線形独立であることを示せ.

(2) $B\mathbf{x}_1, B\mathbf{x}_2, \dots, B\mathbf{x}_m$ が BA の固有ベクトルであることを示せ.

(3) $m = \dim f(\mathbf{R}^n)$ であることを示せ.

ヒント: $(f \circ g)(\mathbf{R}^m) \subseteq f(\mathbf{R}^n) \subseteq \mathbf{R}^m$

注意: $(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})) = A(B\mathbf{x}) = AB\mathbf{x}$

(4) BA が対角化可能であることを示せ.

ヒント 1: 次元定理と (3) から $\dim(\ker f)$ が分かる.

ヒント 2: $\ker f \subseteq \ker(g \circ f)$ から $\dim(\ker(g \circ f)) \geq ?$ が分かる.

ヒント 3: $\dim(\ker(g \circ f))$ は BA の固有値 0 に対する固有空間の次元と等しい.

ヒント 4: n 個の線形独立な BA の固有ベクトルを取ることができる $\Leftrightarrow BA$ は対角化可能

$$\boxed{1} \quad (1) |\lambda E - A| = (\lambda - x - y)^3 \lambda$$

(2) Case 1. $x + y = 0$ かつ $(x \neq 0 \text{ または } y \neq 0)$

$\text{rank}(0E - A) = 1$ より, $(0E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度は 3.

よって, 重複度と解の自由度が異なるので, A は対角化可能ではない.

Case 2. $x = 0$ かつ $y = 0$

$\text{rank}(0E - A) = 0$ より, $(0E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度は 4.

よって, 重複度と解の自由度が等しいので, A は対角化可能.

Case 3. $x + y \neq 0$

$\text{rank}((x + y)E - A) = 1$ より, $((x + y)E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度は 3.

よって, 重複度と解の自由度が等しいので, A は対角化可能.

$$\boxed{2} \quad \frac{3}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2 - \frac{1}{2}y_4^2$$

$$\boxed{3} \quad (1) \sum_{1 \leq i \leq m} k_i B\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow B \sum_{1 \leq i \leq m} k_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow AB \sum_{1 \leq i \leq m} k_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \leq i \leq m} k_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad (\because AB \text{ は正則})$$

よって $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ が線形独立であることから, $k_i = 0$ ($1 \leq i \leq m$).

よって, $B\mathbf{x}_1, B\mathbf{x}_2, \dots, B\mathbf{x}_m$ は線形独立である.

(2) $AB\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ とする. このとき, $BA(B\mathbf{x}_i) = B(AB\mathbf{x}_i) = B(\lambda_i \mathbf{x}_i) = \lambda_i (B\mathbf{x}_i)$.

また, $B\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ と仮定すると $AB\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$, すなわち $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ となり矛盾するので $B\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$.

よって, $B\mathbf{x}_i$ は BA の固有ベクトルである.

(3) AB が正則であることから, $\dim(f \circ g)(\mathbf{R}^m) = m$.

よって $(f \circ g)(\mathbf{R}^m) \subseteq f(\mathbf{R}^n) \subseteq \mathbf{R}^m$ であることから,

$$m = \dim(f \circ g)(\mathbf{R}^m) \leq \dim f(\mathbf{R}^n) \leq \dim \mathbf{R}^m = m.$$

よって, $m = \dim f(\mathbf{R}^n)$ である.

(4) $\ker f \subseteq \ker(g \circ f)$ であることから,

$$\dim(\ker f) \leq \dim(\ker(g \circ f)).$$

よって次元定理と (3) より,

$$n - m \leq \dim(\ker(g \circ f)).$$

よって, BA の固有値 0 に対する線形独立な固有ベクトルを $n - m$ 個取ることができ,

$B\mathbf{x}_1, B\mathbf{x}_2, \dots, B\mathbf{x}_m$ と合わせることで

n 個の線形独立な BA の固有ベクトルを取ることができる.

よって BA は対角化可能である.