

2020 年度前期中間レポート

$$[1] \quad A = \begin{pmatrix} a+(n-1) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a+(n-1) \\ a+(n-2) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a+(n-2) & 0 \\ a+(n-3) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a+(n-3) & 0 & 0 \\ a+(n-4) & 0 & 0 & 0 & \dots & a+(n-4) & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a+3 & 0 & 0 & a+3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a+2 & 0 & a+2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a+1 & a+1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ na+n(n-1)/2 & a+1 & a+2 & a+3 & \dots & a+(n-4) & a+(n-3) & a+(n-2) & a+(n-1) \end{pmatrix}$$

とする。このとき次の問に答えよ。

(実数の範囲で因数分解できる場合は必ず因数分解すること。各 25 点)

(1) $|A^2|$ を求めよ。

(2) $n=3$ とする。 A が正則であるための必要十分条件を求めよ。

また、このとき $A^{-1} = \frac{-1}{a(a+1)(a+2)}B$ となる行列 B を求めよ。

(3) $n=3$ とする。 A が正則のとき、連立 1 次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -a(a+1)(a+2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を解け。

[2] 次の $4n$ 次正方行列 A_{4n} に対して、 $|A_{4n}|$ を求めよ。(25 点)

$$A_{4n} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2020 年度前期中間レポートの略解

$$\boxed{1} \quad (1) \quad |A| = a^2(a+1)^2 \cdots (a+n-1)^2$$

$$(2) \quad a \neq 0, -1, -2,$$

$$B = \begin{pmatrix} (a+1)(a+2) & (a+1)(a+2) & -(a+1)(a+2) \\ -(a+1)(a+2) & -(a+2)(2a+1) & (a+1)(a+2) \\ -2(a+1)^2 & -(a+1)(a+2) & (a+1)(a+2) \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} (a+1)(a+2) \\ -(a+2)(2a+1) \\ -2(a+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{2} \quad |A_{4n}| = |A_{4(n-1)}| = \cdots = |A_4| = 1$$