

2020 年度前期期末レポート

- 1 整数 m, n ($m \leq n$) と実数 x_i ($1 \leq i \leq m$) に対し,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_m^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_m^{n-1} \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

このとき, $\text{rank} A = |\{x_1, x_2, \dots, x_m\}|$ であることを示せ.

注意: $\{ \}$ は集合を表し, $|\{ \}|$ は集合の要素の個数を表す.

例えば, $|\{a, b, c\}| = 3$, $|\{a, b, c, a\}| = 3$ となる.

ヒント 1: m に関する帰納法で証明しやすい.

ヒント 2:

$|\{x_1, x_2, \dots, x_k\}| \leq k-1$ と $|\{x_1, x_2, \dots, x_k\}| = k$ で場合分けすると証明しやすい.

このように場合分けをすると次の性質が利用できる.

$|\{x_1, x_2, \dots, x_k\}| \leq k-1$ のとき: A のある二つの列が同じになる.

$|\{x_1, x_2, \dots, x_k\}| = k$ のとき: $x_1, x_2, \dots, x_k$ は相異なる値となる.

ヒント 3: $|\{x_1, x_2, \dots, x_k\}| = k$ の場合は次の基本変形を行うと考えやすい.

n 行目から $(n-1)$ 行目の x_1 倍を引く

→

$(n-1)$ 行目から $(n-2)$ 行目の x_1 倍を引く

→ ...

2 行目から 1 行目の x_1 倍を引く

ヒント 4: 一般に次の等式が成り立つ.

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ 0 & x_{32} & \cdots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ x_{32} & \cdots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} + 1$$

- 2 実数 a に対し, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 以下の問に答えよ.

注意 1: 答えのみを書くこと.

注意 2: 因数分解ができる場合は必ず因数分解を行うこと.

(1) A の階数を求めよ.

(2) A が正則であるとき, $A^{-1} = \frac{1}{2(1-a)(1+a)}B$ となる行列 B を求めよ.

(3) 同次連立 1 次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解を求めよ.

(4) 連立 1 次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ の解を求めよ.

2020 年度前期期末レポートの略解

1 $m = 1$ のときは明らか.

以下 $1 \leq m \leq k-1$ のときは等式が成り立つと仮定し (帰納法の仮定),

$m = k$ のときにも等式が成り立つことを証明する.

$|\{x_1, x_2, \dots, x_k\}| \leq k-1$ の場合:

このとき $x_i = x_j$ となる異なる i, j が存在する.

$x_1, x_2, \dots, x_k$ の対称性より x_1 と x_k が等しいとしてよい.

このとき, k 列目から 1 列目を引くことで k 列目の要素を全て 0 にすることができる.

よって帰納法の仮定より (全てが 0 の列は階数の計算で無視してよい),

$$\text{rank} A = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{k-1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{k-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{k-1}^{n-1} \end{pmatrix} = |\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}| = |\{x_1, x_2, \dots, x_k\}|.$$

$|\{x_1, x_2, \dots, x_k\}| = k$ の場合:

(このとき, $x_1, x_2, \dots, x_k$ は相異なる値になることに注意.)

ヒント 3 の基本変形を行うことで,

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_k - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_k(x_k - x_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_k^{n-2}(x_k - x_1) \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

$x_1, x_2, \dots, x_k$ が相異なる値であることから,

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & \cdots & x_k - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_k(x_k - x_1) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_k^{n-2}(x_k - x_1) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_k \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_k^{n-2} \end{pmatrix}.$$

よって帰納法の仮定より (初めの等号はヒント 4 を用いた),

$$\text{rank} A = 1 + \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_k \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_k^{n-2} \end{pmatrix} = 1 + |\{x_2, \dots, x_k\}| = |\{x_1, x_2, \dots, x_k\}|. \quad \square$$

2 (1)

$a = -1$ または $a = 1$ のとき, $\text{rank } A = 2$

$a \neq -1, 1$ のとき, $\text{rank } A = 3$

$$(2) \quad B = \begin{pmatrix} -a(1+a) & (1-a)(1+a) & 1+a \\ a(1-a) & -(1-a)(1+a) & 1-a \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(3)

$$a = -1 \text{ のとき, } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a = 1 \text{ のとき, } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a \neq -1, 1 \text{ のとき, } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4)

$a = -1$ のとき, 解なし

$$a = 1 \text{ のとき, } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a \neq -1, 1 \text{ のとき, } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+a)} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$