

2021 年度後期中間レポート

- 1 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_6$ を \mathbf{R}^6 の基底とし, f を $1 \leq i \leq 6$ に対して

$$f(\mathbf{u}_i) = \sum_{i \leq j \leq 3+i} \mathbf{u}_j$$

である \mathbf{R}^6 上の線形変換とする ($7 \leq j \leq 9$ のときは $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_{j-6}$ とする).

このとき, 次の間に答えよ.

注意: 説明を書くこと.

(1) $f(\mathbf{R}^6)$ の次元と基底を求めよ.

(2) $f^{-1}(\mathbf{0})$ の次元と基底を求めよ.

2 $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

$W_1 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle, W_2 = \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5 \rangle$ とする.

このとき, 次の間に答えよ.

注意: (1) と (2) は答えのみを書くこと. (3) は説明を書くこと (計算部分は書かなくてよい).

(1) W_1 の次元と基底を求めよ.

(2) W_2 の次元と基底を求めよ.

(3) $W_1 \cap W_2$ の次元と基底を求めよ.

2021 年度後期中間レポート略解

1 (1) $\dim f(\mathbf{R}^6) = 5$. 基底として $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), f(\mathbf{u}_3), f(\mathbf{u}_4), f(\mathbf{u}_5)\}$ がとれる.

(2) $\dim f^{-1}(\mathbf{0}) = 1$. 基底として $\{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_5 - \mathbf{u}_6\}$ がとれる.

2 (1) $\dim W_1 = 3$. W_1 の基底として, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ がとれる.

(2) $\dim W_2 = 3$. W_2 の基底として, $\{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\}$ がとれる.

注意 1: W_1 は $8x + 8y - 12z + 3w = 0$ 上の頂点集合.

注意 2: W_2 は $x + y - z = 0$ 上の頂点集合.

(3) $\dim (W_1 \cap W_2) = 2$. $W_1 \cap W_2$ の基底として, $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$ (または $\{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$) がとれる.