

1 $A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & -y \\ 0 & x-y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-y & 0 \\ -x & 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ とする (x と y は $y \neq 0$ かつ $x \neq 2y$ である実数とする).

このとき, 次の問に答えよ.

* (1) と (3) は答えのみを書くこと. (2) は理由も書くこと.

(1) A の固有多項式を因数分解した形で書け. (10 点)

(2) 次の各場合において A が対角化可能であるかどうかを調べよ. (各 10 点)

(i) $x + y = 0$ の場合

(ii) $x - y = 0$ の場合

(iii) $x \neq y$ かつ $x \neq -y$ の場合

(3) $x = y$ とする. このとき 2 次形式 $(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$ の標準形を求めよ. (10 点)

2 A を n 次正方行列とし, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ を A の固有値全体, W_i を固有値 λ_i に対する A の固有空間とする ($i = 1, 2, \dots, m$).

このとき, 以下の問に答えよ.

* (2) と (3) は必ず (1) を用いて示すこと.

(1) $i = 1, 2, \dots, m$ に対して, $Y_i = \{j : 1 \leq j \leq m \text{ かつ } i \neq j\}$ とし,

$B_i = \prod_{j \in Y_i} (A - \lambda_j E)$ とする. このとき次の 2 つの式が成り立つことを示せ. (各 10 点)

(i) $\mathbf{x} \in W_i$ に対して, $B_i \mathbf{x} = (\prod_{j \in Y_i} (\lambda_i - \lambda_j)) \mathbf{x}$

(ii) $j \in Y_i, \mathbf{x} \in W_j$ に対して, $B_i \mathbf{x} = \mathbf{0}$

(2) $i = 1, 2, \dots, m$ に対して, $\{\mathbf{v}_{i,1}, \mathbf{v}_{i,2}, \dots, \mathbf{v}_{i,r(i)}\}$ を W_i の基底とする.

このとき $\bigcup_{1 \leq i \leq m} \{\mathbf{v}_{i,1}, \mathbf{v}_{i,2}, \dots, \mathbf{v}_{i,r(i)}\}$ が線形独立な組であることを示せ. (15 点)

(3) A が対称行列ならば $\prod_{1 \leq j \leq m} (A - \lambda_j E)$ が零行列であることを示せ. (15 点)

* A が対称行列ならば $\bigcup_{1 \leq i \leq m} \{\mathbf{v}_{i,1}, \mathbf{v}_{i,2}, \dots, \mathbf{v}_{i,r(i)}\}$ が $\mathbf{R}^n$ の基底となることを用いてよい.

1 (1) $|\lambda E - A| = (\lambda - x + y)^2(\lambda - x - y)\lambda$

(2) Case 1. $x + y = 0$

$\text{rank}(0E - A) = 3$ より, $(0E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度は 1.

よって, 重複度と解の自由度が異なるので, A は対角化可能ではない.

Case 2. $x - y = 0$

$\text{rank}(0E - A) = 1$ より, $(0E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度は 3.

よって, 重複度と解の自由度が等しいので, A は対角化可能.

Case 3. $x \neq y$ かつ $x \neq -y$

$\text{rank}((x - y)E - A) = 2$ より, $((x - y)E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度は 2.

よって, 重複度と解の自由度が等しいので, A は対角化可能.

(3) $2xy_1^2$

2 問題文に $m \geq 2$ を書き忘れました.

(1) 簡単なので省略

(2) $\sum_{1 \leq i \leq m} (\sum_{1 \leq j \leq r(i)} k_{i,j} \mathbf{v}_{i,j}) = \mathbf{0}$ とする.

各 i に対して, $\mathbf{x}_i = \sum_{1 \leq j \leq r(i)} k_{i,j} \mathbf{v}_{i,j}$ とおく.

$\{\mathbf{v}_{i,1}, \mathbf{v}_{i,2}, \dots, \mathbf{v}_{i,r(i)}\}$ が W_i の基底であることから $\mathbf{x}_i \in W_i$ が分かる.

よって (1) より, $B_i(\sum_{1 \leq i \leq m} \mathbf{x}_i) = (\prod_{j \in Y_i} (\lambda_i - \lambda_j)) \mathbf{x}_i$.

よって $\sum_{1 \leq i \leq m} \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ であることから

$$(\prod_{j \in Y_i} (\lambda_i - \lambda_j)) \mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$

よって λ_i が相異なる固有値であることから $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ であることが分かる.

よって $\sum_{1 \leq j \leq r(i)} k_{i,j} \mathbf{v}_{i,j} = \mathbf{0}$ となり,

$\{\mathbf{v}_{i,1}, \mathbf{v}_{i,2}, \dots, \mathbf{v}_{i,r(i)}\}$ が W_i の基底であることから

$k_{i,j} = 0$ ($1 \leq j \leq r(i)$) が分かり, $k_{i,j} = 0$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r(i)$) が分かる.

以上より $\bigcup_{1 \leq i \leq m} \{\mathbf{v}_{i,1}, \mathbf{v}_{i,2}, \dots, \mathbf{v}_{i,r(i)}\}$ が線形独立な組であることが分かる.

(3) A が対称行列であることから

$$\mathbf{e}_i = \sum_{1 \leq i \leq m} \mathbf{x}_i \quad (x_i \in W_i) \text{ と表すことができるので,}$$

(1) (ii) より,

$$\prod_{1 \leq j \leq m} (A - \lambda_j E) \mathbf{e}_i = \sum_{1 \leq i \leq m} (A - \lambda_{i+1} E) (B_{i+1} \mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$$

であることが分かる (ただし $m+1=1$ とする).

よって $\prod_{1 \leq j \leq m} (A - \lambda_j E)$ の各列は零ベクトルであり,

$\prod_{1 \leq j \leq m} (A - \lambda_j E)$ が零行列であることが分かる.