

2021 年度前期中間レポート

p と q を $(p, q) = (0, 0)$ ではない実数とする．以下の n 次正方行列 P_n に対して各問に答えよ．

$$P_n = \begin{pmatrix} p+q & p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & p+q & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & p+q & p & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & p+q & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p+q & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & p+q & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q & p+q & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & q & p+q \end{pmatrix}$$

(1) $p \neq q$ のとき, $|P_n|$ を求めよ．

(2) $p = q$ のとき, $|P_n|$ を求めよ．

(3) $n = 3, p \neq q$ とする．連立 1 次方程式 $P_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |P_3| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をクラメルの公式を用いて解け．

(4) $n = 3, p \neq q$ とし, $P_3^{-1} = \frac{1}{(p+q)(p^2+q^2)}Q$ とする． Q を求めよ．

2021 年度前期中間レポートの略解

(1) $\frac{q^{n+1} - p^{n+1}}{q - p}$

(2) $p^n(n+1)$

(3) $\begin{pmatrix} p^2 + pq + q^2 \\ -q(p+q) \\ q^2 \end{pmatrix}$

(4) $Q = \begin{pmatrix} p^2 + pq + q^2 & -p(p+q) & p^2 \\ -q(p+q) & (p+q)^2 & -p(p+q) \\ q^2 & -q(p+q) & p^2 + pq + q^2 \end{pmatrix}$