開多様体上のブーゼマン関数と等長群のコンパクト性[1]

近藤 慶

東海大学 理学部 数学科 **非常勤**講師

e-mail :

keikondo@keyaki.cc.u-tokai.ac.jp

概 要

驚くべき事に、曲面論で良く知られた多くの結果は、ほぼ同じ証明によって一般化 (高次元化) されている。しかしながら、全曲率に関わる多くの固有の結果は、簡単には一般化出来ない。例えば、数ある Cohn-Vossen の先駆的な結果の一般化である所の分裂定理 ([T])、正断面曲率、非負断面曲率を持つ n 次元非コンパクト完備リーマン多様体の構造定理 (それぞれ、[GM], [CG]) などは、30 年以上の時を経て証明されている。本講演では、塩濱による曲面上の全曲率とブーゼマン関数の exhaustion 性に関するある結果 ([S]) の n 次元非コンパクト完備リーマン多様体への高次元化 (田中實教授との共同研究 [KT3]) についてご紹介する。この一般化の系として、n 次元非コンパクト完備リーマン多様体上のブーゼマン関数の exhaustion 性が、等長群のコンパクト性を誘発する。

1 塩濱の結果

Gauss–Bonnet の定理より、2 次元コンパクト・リーマン多様体 S の全曲率 $c(S)$ は、位相不変量であった、つまり、$c(S) = 2\pi\chi(S)$ である。ここで、$\chi(S)$ は、S の Euler 特性数を表す。ところが、全曲率を許容する 2 次元非コンパクト完備リーマン多様体 $\widetilde{M}$ を考えた時、その全曲率 $c(\widetilde{M})$ は、もはや**位相不変量ではない**。すなわち、連結完備・非コンパクト・有限連結・2 次元リーマン多様体 $\widetilde{M}$ が全曲率を許容する時、$c(\widetilde{M}) \le 2\pi\chi(\widetilde{M})$ であった ([CV, Satz 6] を参照)。従って、逆に $c(\widetilde{M})$ に制限 (有限性) を与える事によって、我々は、$\widetilde{M}$ の位相をコントロールする事が出来る。$c(\widetilde{M})$ の有限性が $\widetilde{M}$ の位相に強い影響を与える事を顕著に現した一つの好例として、塩濱の以下の結果がある：

定理 1.1 ([S, Main Theorem]) $\widetilde{M}$ を端点が一つである連結完備・非コンパクト・有限連結・向き付けられた 2 次元リーマン多様体とする。もし $\widetilde{M}$ の全曲率が $(2\chi(\widetilde{M}) - 1)\pi$ より大ならば、$\widetilde{M}$ 上の任意のブーゼマン関数[2]は、exhaustion[3]である。

放射曲率の比較幾何では、その参照空間 (比較空間) は回転面であるので、全曲率の条件を参照空間に与える事により、全曲率に関わる曲面論固有の結果を一般化出来る可能性

[1]研究集会「部分多様体幾何とリー群作用」アブストラクト, 2010 年 9 月 8 日, 東京理科大学森戸記念館第 1 フォーラム.

[2]M を完備・非コンパクト・リーマン多様体とする。この時、M 上の半直線 γ に対するブーゼマン関数は、$F_\gamma(x) := \lim_{t\to\infty} \{t - d(x, \gamma(t))\}$ と定義される関数である。

[3]非コンパクト多様体上の関数 F が **exhaustion** であるとは、 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、$F^{-1}(-\infty, a]$ がコンパクトである時を言う。

が出てくる (と考えるべきである)。従って、放射曲率の立場から、定理 1.1 を任意次元非コンパクト完備リーマン多様体に一般化したものが、本講演における主結果である。その主結果をご紹介する前に、先ずは、放射曲率の定義から始めよう。

2 放射曲率の定義

以下、$\widetilde{M}$ を基点 $\tilde{p} \in \widetilde{M}$ を持つ、$\mathbb{R}^2$ に同相な、完備・非コンパクト 2 次元リーマン多様体とし、G を $\widetilde{M}$ のガウス曲率とする。

定義 2.1 組 $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ が、**回転面モデル**であるとは、$\widetilde{M}$ のリーマン計量が $d\tilde{s}^2$ が、測地的極座標

$$d\tilde{s}^2 = dt^2 + f(t)^2 d\theta^2, \quad \forall (t, \theta) \in (0, \infty) \times \mathbb{S}^1_{\tilde{p}}$$

で与えられている時を言う。ここで、f は $(0, \infty)$ 上で定義された正定値 C^∞-関数で、0 の周りで滑らかに奇関数へと拡張出来るものとし、$d\theta^2$ は $\mathbb{S}^1_{\tilde{p}} := \{v \in T_{\tilde{p}}\widetilde{M} \mid \|v\| = 1\}$ 上のリーマン計量とする。

n 次元 (回転面) モデル $(\widetilde{M}^n, \tilde{p})$ の分類については、[KK] を参照。

定義 2.2 $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ を回転面モデルとする。このとき、G を $\tilde{p}$ から出る任意の子午線 $\tilde{\gamma}$ に制限した関数 $G \circ \tilde{\gamma} : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ の**放射曲率関数**と呼ぶ。

放射曲率関数 $G \circ \tilde{\gamma} : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して、f がヤコビの微分方程式

$$f''(t) + G(\tilde{\gamma}(t)) f(t) = 0, \quad f(0) = 0,\ f'(0) = 1$$

を自然に満たす事に注意したい。

以下、組 (M, p) を基点 $p \in M$ を持つ完備・非コンパクトリーマン多様体とする。

定義 2.3 基点 p に関する (M, p) の放射断面曲率が回転面モデル $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ の放射曲率関数 $G(\tilde{\gamma}(t))$ で下から押さえられているとは、p から出る (速さが 1 の) 任意の最短測地線 $\gamma : [0, a) \longrightarrow M$ に沿って、M の断面曲率 K_M が

$$K_M(\sigma_t) \geq G(\tilde{\gamma}(t)), \quad \forall \sigma_t \subset T_{\gamma(t)}M,\ \forall t \in [0, a) \tag{2.1}$$

を満たす時を言う。ここで、$\sigma_t \subset T_{\gamma(t)}M$ は、$\gamma'(t)$ と接ベクトル $v \in T_{\gamma(t)}M$ で張られる 2 次元線形空間である。

例えば、(2.1) のもと、回転面モデル $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ のリーマン計量が $dt^2 + t^2 d\theta^2$、又は、$dt^2 + \sinh^2 t\, d\theta^2$ であるならば、放射曲率関数は、$G(\tilde{\gamma}(t)) = 0$、又は、$G(\tilde{\gamma}(t)) = -1$ となる。特に、放射断面曲率の符号は、ワイルド (デタラメ) に変わる事に注意したい ([TK] を参照)。

3　主結果

先ずは、主結果に現れる (又は関連する) 記号を定義する：以下、組 (M, p) を基点 $p \in M$ を持つ完備・非コンパクト・リーマン多様体とし、$\mathcal{R}_M$ を M 上の半直線全体の集合、$\mathcal{R}_p$ を p から出る半直線全体の集合とする。各 $\gamma \in \mathcal{R}_M$ に対して、ある発散点列 $\{t_i\}$ に対する、p と $\gamma(t_i)$ を結ぶ最短測地線列の極限半直線全体の集合を $\Pi(\gamma)$ で表す[4]。更に、$A_p := \{\gamma'(0) \in \mathbb{S}_p^{n-1} \mid \gamma \in \mathcal{R}_p\}$ と置き、$\mathrm{diam}(A_p)$ で A_p の直径を表す。ここで、$\mathbb{S}_p^{n-1} := \{v \in T_pM \mid \|v\| = 1\}$ である。

定義 3.1 集合 $S \subset A_p$ が、A_p **の** δ**-カバー**であるとは、

$$A_p \subset \bigcup_{v \in S} \overline{\mathbb{B}_\delta(v)}$$

を満たす時を言う。ここで、$\overline{\mathbb{B}_\delta(v)} := \left\{w \in \mathbb{S}_p^{n-1} \mid \angle(v, w) \le \delta\right\}$ である。

主結果. (M, p) を完備・非コンパクト連結リーマン多様体とし、基点 p に関する M の放射断面曲率が回転面モデル $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ の放射曲率関数 $G(\tilde{\gamma}(t))$ で下から押さえられているとする。今、次の二つの条件

(MT–1) $\widetilde{M}$ の全曲率 $c(\widetilde{M})$ が、$c(\widetilde{M}) > \pi$ を満たす.

(MT–2) ある $\delta_0 \in (0, \pi]$ に対して、$\widetilde{M}$ が、集合 $\widetilde{V}(\delta) := \{\tilde{x} \in \widetilde{M} \,|\, 0 < \theta(\tilde{x}) < \delta\}$ 内に切断点のペアをもたない.

を仮定する。このとき、集合

$$\{\alpha'(0) \in \mathbb{S}_p^{n-1} \mid \alpha \in \bigcup_{i=1}^{k} \Pi(\gamma_i)\}$$

が A_p の δ_0-カバーとなる任意の $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in \mathcal{R}_M$ に対して、関数

$$\max\{F_{\gamma_i} \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$$

は、exhaustion である。ここで、F_{γ_i} は、各 $\gamma_i \in \mathcal{R}_M$ に対するブーゼマン関数である。更に、もし $\mathrm{diam}(A_p) \le \delta_0$、又は、$\delta_0 = \pi$ であるならば、**全ての** $\gamma \in \mathcal{R}_M$ に対して、ブーゼマン関数 F_γ は exhaustion であり、特に、M の等長群 $I(M)$ はコンパクトである。

主結果に対する簡単な注意： 条件 (MT–1) より、$\widetilde{M}$ のガウス曲率がいつも至る所非負であると思う方がいるかもしれないが、各条件 (MT–1) と (MT–2) 満たし、かつ、$\lim_{t \to \infty} G \circ \tilde{\gamma}(t) = -\infty$ を満たす例がある ([KT1, Example 1.2])。一般に、回転面モデルが有限全曲率を許容するとき、各 $\varepsilon > 0$ に対して、$\int_{\widetilde{M} \setminus \widetilde{K}_\varepsilon} |G| \, d\widetilde{M} < \varepsilon$ を満たすコンパクト集合 $\widetilde{K}_\varepsilon \subset \widetilde{M}$ が存

[4]定義より、$\alpha \in \Pi(\gamma)$ は、γ に対する p から出る漸近半直線である。特に、もし $\gamma \in \mathcal{R}_p$ ならば、$\Pi(\gamma) = \{\gamma\}$ である。

在する事が知られている。よって、この事から、あるコンパクト集合の外側で、$\widetilde{M}$ のガウス曲率は殆どフラットだと思う方もいるかもしれないが、この予想も嘘である。デタラメに $G(\tilde{\gamma}(t))$ が変化するクレイジーな例は、[TK] にある。

条件 (MT–2) を満たす典型的な例として Mangoldt の回転面[5]がある。つまり、この回転面は、$\widetilde{V}(\pi)$ 内に切断点のペアを持たない。(MT–2) を満たす他の例は、[KT2, Sector Theorem] を参照。

主結果内の系にあたる部分、即ち、「M の等長群 $I(M)$ はコンパクトである」の証明の際に、マイヤースとスティーンロッド ([MS]) が「リーマン多様体の等長群はリー群である」を証明する際に使った命題を F_γ の臨界点に対して応用する。

参考文献

[CG] J. Cheeger and D. Gromoll, *On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature*, Ann. of Math. **96** (1972), 415–443.

[CV] S. Cohn-Vossen, *Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen*, Compositio Math. **2** (1935), 63–113.

[GM] D. Gromoll and W. Meyer, *On complete manifolds of positive curvature*, Ann. of Math. (2) **75** (1969), 75–90.

[KK] N. N. Katz and K. Kondo, *Generalized space forms*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 2279–2284.

[KT1] K. Kondo and M. Tanaka, *Total curvatures of model surfaces control topology of complete open manifolds with radial curvature bounded below. I*, to appear in Math. Ann.

[KT2] K. Kondo and M. Tanaka, *Total curvatures of model surfaces control topology of complete open manifolds with radial curvature bounded below. II*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc., **362**, No. 12. (2010), 6293–6324.

[KT3] K. Kondo and M. Tanaka, *Total curvatures of model surfaces control topology of complete open manifolds with radial curvature bounded below. III*, Preprint 2010, submitted to JMSJ, `arxiv.org/abs/1001.1279`

[MS] S. B. Myers and N. E. Steenrod, *The groups of isometries of a Riemannian manifold*, Ann. of Math. **40** (1939), 400–416.

[S] K. Shiohama, *The role of total curvature on complete noncompact Riemannian 2-manifolds*, Illinois J. Math. **28** (1984), 597–620.

[T] V. A. Toponogov, *Riemannian spaces containing straight lines*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **127** (1959), 977–979.

[TK] M. Tanaka and K. Kondo, *The Gaussian curvature of a model surface with finite total curvature is not always bounded.*, In preparation, 2008–2010.

[5] $G(\tilde{\gamma}(t))$ が $[0, \infty)$ 上で単調減少である回転面モデルのことを言う。