境界付き多様体のモース理論

赤穂まなぶ
首都大学東京 大学院理工学研究科 数理情報科学専攻

本講演では境界付きコンパクト多様体のモース理論, 特にモースホモロジーにおけるカップ積の構成について詳しく解説をする.

閉多様体に (一般的な) リーマン計量とモース関数が与えられると, 不安定多様体を胞体とする閉多様体の胞体分割を与えることができる. 一方, 一般に胞体分割が与えられるとそこから特異ホモロジーを計算することができる. この特異ホモロジーの計算方法を先に与えられた不安定多様体による胞体分割の言葉で表わしたものがモースホモロジーである. その構成方法は以下のようになる: まず臨界点を生成元とし, モース指数を次数とする次数付き加群を定義する. そしてその次数付き加群上に, モース指数の差が 1 の臨界点を結ぶ勾配ベクトル場の積分曲線の (符号付き) 本数を結合係数とする準同型写像を定義する. するとこの次数付き加群と準同型写像の組はチェイン複体となり, そのホモロジー群は閉多様体の特異ホモロジーと同型になる.

今回の講演ではこの構成を境界付きコンパクト多様体に拡張する. その場合もやはり多様体上に適当なリーマン計量とモース関数を与え, それらの臨界点と勾配ベクトル場の積分曲線を用いてチェイン複体が構成される. そしてそのチェイン複体のホモロジー群は境界付きコンパクト多様体の (アブソリュートな) 特異ホモロジーと同型になる.

次にカップ積について考える. 前述のモースホモロジーの構成で必要なモース関数の個数は一つであった. ところがモース理論の文脈でカップ積を定義するためにはモース関数が三つ必要になる.

閉多様体の場合, このカップ積の定義はおおよそ次のようになる. それぞれの辺が与えられた三つのモース関数の勾配ベクトル場の積分曲線になり, 端点がそれぞれの臨界点に収束するような”Y 字型のグラフ”を考える. そして三つそれぞれのモース関数から構成されるモース複体の間に, この Y 字型グラフの (符号付き) 個数を結合係数とする積を定義する. するとこの積はライプニッツ則を満たしモースホモロジーに積を誘導する. 実はこの積がカップ積に一致する.

次にこのカップ積の構成を先の境界付きコンパクト多様体のモースホモロジーに拡張する. この場合もやはり三つのモース関数の勾配ベクトル場を用いた Y 字型グラフが登場するのだが, その定義はかなり複雑になる. しかしいったん定義が行われると閉多様体の場合と同様に, その積はライプニッツ則を満たしモースホモロジーに積を誘導することがわかる.

今回の講演では触れる時間がないかもしれないが, この境界付きコンパクト多様体のモース理論は凸型のエンドをもつシンプレクティック多様体におけるラグランジュ交叉のフレアー理論と密接な関係がある.