葉層多様体における
横断的Calabi-Yau構造のモジュライ空間

森山 貴之（京都大学理学研究科）

1 序

多様体 M 上において接束 TM の部分束 $F \subset TM$ が完全積分可能の時, M の各点を通る積分多様体が存在し, この部分多様体を葉と言い, その族が葉層構造 $\mathcal{F}$ であった. 横断的幾何構造とは各葉に対して横断的な方向の幾何構造の事である. よって, 横断的幾何構造とはその葉の空間（多様体を同じ葉の点は同一視するという同値関係で割った商空間）上の幾何構造と考える事が出来る. しかし, 一般にこの葉空間は大変複雑な空間であり, ハウスドルフでない場合もある. 横断的幾何構造の正確な定義は多様体の局所座標の横断的な方向の貼り合わせにより定義できる. しかし, ここではテンソルによる特徴付けを採用する. つまり, 完全積分可能な分布 $F \subset TM$ に対し, 横断的な幾何構造とは商束 $Q = TM/F$（から作られる束）へのベーシック（各葉に沿って一定）な切断で, ある可積分性を持つものとして捉える. 例えば横断的正則構造とは商束 Q の複素構造 $J \in \Gamma(\mathrm{End}(Q))$ でベーシックなもの（で拡張されたナイエンハウステンソルが消えているもの）により与えられる. 更にこの J と両立するような, 商束 Q の symplectic 構造 $\omega \in \Gamma(\wedge^2 Q^*)$ でベーシックな閉微分形式になるものが横断的ケーラー構造を定める. ここでの可積分性は「d-閉性」である.

さて, 横断的正則構造を持つ葉層構造の変形は小平・スペンサーによる多重葉層構造の変形理論 [6] を基に数多くの研究がなされてきた [1] [4] [3]. 一方, 幾何構造を微分形式で捉え変形を考えるという後藤の変形理論を基に横断的な幾何構造をベーシックな微分形式として捉え, 変形理論を考える事が出来る. そして, いくつかの横断的な幾何構造の変形空間の非障害性や一般化されたモーザーの安定性定理が示せる [7]. 本講演では横断的カラビ・ヤウ構造に焦点を当て, その変形空間をある同値類で割った空間（モジュライ空間）の構造についての研究結果を紹介する.

2 横断的Calabi-Yau構造

多様体 M を $(2n+\ell)$ 次元, 葉層構造 $\mathcal{F}$ を定めるベクトル束 $F \subset TM$ をランク ℓ とする. 葉層多様体 $(M, \mathcal{F})$ 上の p 次微分形式 $\phi \in \wedge^p$ が

$$i(v)\omega = 0, \quad L_v\omega = 0, \quad {}^\forall v \in \Gamma(F)$$

を満たす時に ϕ を**ベーシック形式**と呼ぶ. 初めの条件から ϕ は $\wedge^p Q^*$ の切断になり, 2つ目の条件は葉に添って一定である事を意味する.

葉層多様体 $(M,\mathcal{F})$ 上の実 2 次微分形式 $\omega\in\wedge^2$ が $\omega^n\neq 0$ を満たす閉ベーシック形式であるときに**横断的 symplectic 構造**という．また，複素 n 次微分形式 $\Omega\in\wedge^n\otimes\mathbb{C}$ が以下を満たす閉ベーシック形式 Ω であるときに**横断的** $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ **構造**であるという：

$$Q\otimes\mathbb{C}=\mathrm{Ker}\,\Omega/F\oplus\overline{\mathrm{Ker}\,\Omega/F}$$

ここで $\mathrm{Ker}\,\Omega=\{v\in TM\otimes\mathbb{C}\mid i_v\Omega=0\}$. このとき, 横断的 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造 Ω から Q の複素構造 $J_\Omega\in\Gamma(\mathrm{End}(Q))$ が定義でき, Ω を $(n,0)$ ベーシック形式とするような横断的正則構造を定める.

定義 1 $(M,\mathcal{F})$ 上の横断的 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 構造 Ω と横断的 symplectic 構造 ω に対し, その組 (Ω,ω) が**横断的 Calabi-Yau 構造**であるとは, 以下を満たす時に言う.

$$\begin{aligned}
&\Omega\wedge\omega=0,\\
&\Omega\wedge\bar{\Omega}=c_n\omega^n\neq 0,\\
&\omega(\cdot,J_\Omega\cdot)\text{ is positive definite on }Q
\end{aligned}$$

ここで $c_n=\frac{1}{n!}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(\frac{2}{\sqrt{-1}})^n$.

この時, $\omega(\cdot,J_\Omega\cdot)$ は Q の計量を定め, 更にベクトル束 $\otimes^2Q^*$ のベーシックな切断となる. このような構造を**横断的リーマン構造**という.

3 主定理

$(M,\mathcal{F})$ 上の横断的 Calabi-Yau 構造全体の空間を $\widetilde{\mathfrak{M}}_{CY}(M,\mathcal{F})$ とし, $\mathrm{Diff}(M,\mathcal{F})$ を葉層構造を保つ微分同相群とする．この時, $\mathrm{Diff}(M,\mathcal{F})$ は微分形式の引き戻しにより $\widetilde{\mathfrak{M}}_{CY}(M,\mathcal{F})$ に作用する. モジュライ空間 $\mathfrak{M}_{CY}(M,\mathcal{F})$ を

$$\mathfrak{M}_{CY}(M,\mathcal{F})=\widetilde{\mathfrak{M}}_{CY}(M,\mathcal{F})/\mathrm{Diff}_0(M,\mathcal{F})$$

として定義する．ここで $\mathrm{Diff}_0(M,\mathcal{F})$ は $\mathrm{Diff}(M,\mathcal{F})$ の単位元の連結成分とする. 葉層構造を考えない場合, つまり, カラビ・ヤウ構造の場合, そのモジュライ空間はハウスドルフになる事が知られている [5]. 横断的カラビ・ヤウ構造の場合には葉層構造に次のような条件を課す.

定義 2 $\mathcal{F}$ が **taut 葉層**であるとは, 各葉が極小部分多様体となるようなリーマン計量が存在する葉層構造の事である.

我々の考えているのは横断的は方向の構造であり, 葉層の方向には何の構造も考えていなかった. 例えば横断的リーマン構造は横断的な方向のみの計量や体積要素を与える．しかし, 多様体全体の積分を考える場合には葉層方向の体積要素を指定する必要がある．この taut 葉層であるという条件は葉層方向の “良い”体積要素の存在を保証してくれる.

そして, 次が本講演の主定理である.

定理 1 [7]. M をコンパクト多様体とし, $\mathcal{F}$ を $taut$ 葉層とする. この時, モジュライ空間 $\mathfrak{M}_{CY}(M,\mathcal{F})$ は滑らかな多様体（特にハウスドルフ）になる.

証明の概略 まず, 座標の貼り合わせが滑らかになるのは横断的カラビ・ヤウ構造から作られる変形のコンプレックスが（横断的）楕円型になるという事から従う. 次にハウスドルフ性であるが, これは次の定理からの帰結である.

命題 1 [7]. 横断的リーマン構造全体の空間 $\widetilde{\mathfrak{M}}^s_{met}(M,\mathcal{F})$ に $\mathrm{Diff}^{s+1}_0(M,\mathcal{F})$ 不変なリーマン計量が存在する.

この計量から $\widetilde{\mathfrak{M}}^s_{met}(M,\mathcal{F})$ 上に距離が構成でき, 横断的カラビ・ヤウ構造は横断的リーマン構造を誘導することから, この距離が横断的カラビ・ヤウ構造のモジュライ空間 $\mathfrak{M}_{CY}(M,\mathcal{F})$ の距離を誘導する. これにより $\mathfrak{M}_{CY}(M,\mathcal{F})$ が距離空間（特にハウスドルフ空間）である事が分かる. □

命題についての補足 上の命題において上付き添え字は完備化に関するものであるが, 今考えている状況は（横断的に）調和な対象であり, この様な場合, 結論が完備化やその取り方に寄らない事等は省略する. 実際にエルカチ [2] による横断的楕円型の理論により横断的調和な対象に対し, 調和的な対象と同様の解析的結果が得られる.

又, $\widetilde{\mathfrak{M}}^s_{met}(M,\mathcal{F})$ 上の計量は本質的には M 上の積分を用いて構成される. taut 葉層の所で説明した通り, この積分に, そして $\widetilde{\mathfrak{M}}^s_{met}(M,\mathcal{F})$ 上の計量の構成に taut 性を必要とする.

4 例

横断的カラビ・ヤウ構造を持つ葉層構造の例としては

- トーラスの線形葉層
- （ヌル）佐々木多様体の特殊葉層
- カラビ・ヤウ軌道体上のファイバー束

等がある. これらの例については横断的カラビ・ヤウ構造のモジュライ空間の次元も計算する事が出来る. 本講演ではこの様な例を説明しつつ, モジュライ空間の次元やその計算方法について重点的に話していくつもりである. 特に 5 次元ヌル佐々木多様体の場合にはモジュライ空間の次元は多様体のベッチ数により与えられる事が分かる.

参考文献

[1] T. Duchamp and M. Kalka, *Deformation theory for holomorphic foliations*, J. Diff. Geom. **14** (1979) 317-337.

[2] A. El Kacimi-Alaoui, *Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications*, Compositio Math. **73** (1990) 57-106.

[3] J. Girbau, A. Haefliger and D. Sundararaman, *On deformations of transversely holomorphic foliations*, J. Reine Angew. Math. **345** (1983) 122-147.

[4] X. Gomez-Mont, *Transversal holomorphic structures*, J. Diff. Geom. **15** (1980) 161-186.

[5] R. Goto, *Moduli spaces of topological calibrations, Calabi-Yau, hyperkähler, G_2 and Spin(7) structures*, Inter. J. Math. **15**, No.3 (2004) 211–257.

[6] K. Kodaira and D. C. Spencer, *Multifoliate structures*, Ann. Math. **74**, (1961) 52-100.

[7] T. Moriyama, *Deformations of transverse Calabi-Yau structures on foliated manifolds*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **46**, no.2 (2010) 335-357.

[8] T. Moriyama, *The moduli space of transverse Calabi-Yau structures on foliated manifolds*, Osaka J. Math. **48**, no.2 (2011).