

3次元球面内の大円織面の特異点^{*1}

佐治健太郎 (岐阜大教育)

ksaji@gifu-u.ac.jp

1 設定

3次元球面 S^3 を

$$S^3 = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid x \cdot x = 1\}$$

と定義し, $S^3 \times S^3$ 内の5次元部分多様体

$$\Delta = \{(x, y) \in S^3 \times S^3 \mid x \cdot y = 1\}$$

を考える. ただし \cdot は \mathbf{R}^4 の標準内積である. Δ に対して次の二重ファイブレーションを考える:

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \subset & S^3 \times S^3 \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ S^3 & & S^3 \end{array}$$

ここで, π_i ($i = 1, 2$) はそれぞれ第 i 成分への射影をあらわす. 部分多様体 Δ 上の微分形式 θ を

$$\theta = dx \cdot y|_{\Delta} = -x \cdot dy|_{\Delta}$$

で定義する. このとき, θ は Δ 上の接触形式となり, ファイブレーション $\pi_i : \Delta \rightarrow S^3$ ($i = 1, 2$) はルジャンドル・ファイブレーションとなる.

$U \subset \mathbf{R}^2$ を領域とし, 写像 $f, g : U \rightarrow S^3$ が互いに双対であるとは $(f, g) : U \rightarrow \Delta$ であってこの写像が θ から定まる接触構造に関してルジャンドルであるときをいう.

$f : (U; u, v) \rightarrow S^3$ を曲面とする. $e : U \rightarrow S^3$ を

$$e = \frac{f_u \wedge f_v \wedge f}{\|f_u \wedge f_v \wedge f\|}$$

で定義すると f と e は互いに双対である. この e はガウス写像と呼ばれる. 古典的微分幾何学において特別な性質をもつ曲面を研究することは中心的な研究課題であるが, ガウ

^{*1} 本講演の内容は泉屋周一氏 (北海道大理) ・永井隆之氏 (北海道大理) との共同研究に基づく.

ス写像が特別な性質をもつ曲面も重要な対象である。例えば、 R^3 内の曲面では、ガウス写像が一点になるものは平面であり、ガウス写像が曲線になるものは柱面、錐面、接線曲面である。上記の $f: U \rightarrow S^3$ も e が曲線となる場合は S^3 内の大球の包絡線であり、大円のパラメーター族、すなわち大円織面であることを示すことができる。ここで、 S^3 内の球は $n \in R^4 \setminus \{0\}$ と実数 c を用いて

$$S^2(n, c) = \{x \in S^3 \mid n \cdot x = c\}$$

とあらわすことができる。 $c = 0$ のときこれを大球と呼び、大球内の大円を S^3 の大円と呼ぶ。

本講演では S^3 内の大円織面について主に特異点の性質について報告する。

2 フレームと大円織面の不変量

I で开区間か S^1 をあらわすとする。 S^3 内の大円織面は正規直交フレーム $a_0, a_1, a_2, a_3: I \rightarrow S^3$ を用いて

$$F_A(\theta, t) = \cos \theta a_1(t) + \sin \theta a_3(t)$$

と定義される。ただし $A(t) = (a_0(t), a_1(t), a_2(t), a_3(t)) \in SO(4)$ 。この正規直交フレームの不変量をここで導入する。以下のようにおく：

$$\begin{aligned} c_1(t) &= a'_0(t) \cdot a_1(t) = -a_0(t) \cdot a'_1(t), & c_4(t) &= a'_1(t) \cdot a_2(t) = -a_1(t) \cdot a'_2(t), \\ c_2(t) &= a'_0(t) \cdot a_2(t) = -a_0(t) \cdot a'_2(t), & c_5(t) &= a'_1(t) \cdot a_3(t) = -a_1(t) \cdot a'_3(t), \\ c_3(t) &= a'_0(t) \cdot a_3(t) = -a_0(t) \cdot a'_3(t), & c_6(t) &= a'_2(t) \cdot a_3(t) = -a_2(t) \cdot a'_3(t). \end{aligned}$$

このようにおくと次のフルネ型の公式が得られる：

$$\begin{cases} a'_0(t) &= c_1(t)a_1(t) + c_2(t)a_2(t) + c_3(t)a_3(t) \\ a'_1(t) &= -c_1(t)a_0(t) + c_4(t)a_2(t) + c_5(t)a_3(t) \\ a'_2(t) &= -c_2(t)a_0(t) - c_4(t)a_1(t) + c_6(t)a_3(t) \\ a'_3(t) &= -c_3(t)a_0(t) - c_5(t)a_1(t) - c_6(t)a_2(t). \end{cases}$$

これは次のように書くこともできる：

$$\begin{pmatrix} a'_0(t) \\ a'_1(t) \\ a'_2(t) \\ a'_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_1(t) & c_2(t) & c_3(t) \\ -c_1(t) & 0 & c_4(t) & c_5(t) \\ -c_2(t) & -c_4(t) & 0 & c_6(t) \\ -c_3(t) & -c_5(t) & -c_6(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix}.$$

ここで

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0 & c_1(t) & c_2(t) & c_3(t) \\ -c_1(t) & 0 & c_4(t) & c_5(t) \\ -c_2(t) & -c_4(t) & 0 & c_6(t) \\ -c_3(t) & -c_5(t) & -c_6(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(4),$$

に注意しておく. このことから, 行列に値をとる曲線 $C : I \rightarrow \mathfrak{so}(4)$ が与えられるとフレーム $A(t)$ が定まる. したがって大円織面 F_A が定まる. よって大円織面全体の集合は $C^\infty(I, \mathfrak{so}(4))$ と考えることができる.

3 特異点

2つの可微分写像芽

$$f, g : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$$

が \mathcal{A} -同値であるとは微分同相写像芽

$$h_t : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^2, 0), \quad h_s : (\mathbf{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$$

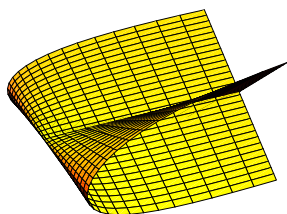
が存在して $f = h_t \circ g \circ h_s$ が成り立つときをいう.

可微分写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ が

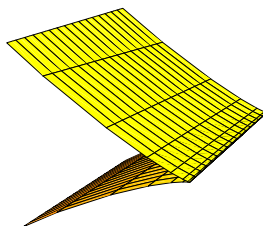
- ホイットニーの傘であるとは $(u, v) \mapsto (u, v^2, uv)$ と \mathcal{A} -同値であるときをいう.
- カस्प辺であるとは $(u, v) \mapsto (u, v^2, v^3)$ と \mathcal{A} -同値であるときをいう.
- スワローテイルであるとは $(u, v) \mapsto (u, 4v^3 + 2uv, 3v^4 + uv^2)$ と \mathcal{A} -同値であるときをいう.
- カスプ的くちばしであるとは $(u, v) \mapsto (u, -2v^3 + u^2v, 3v^4 - u^2v^2)$ と \mathcal{A} -同値であるときをいう.
- カスプ的交差帽子であるとは $(u, v) \mapsto (u, v^2, uv^3)$ と \mathcal{A} -同値であるときをいう.

(図は次ページ参照)

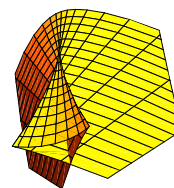
大円織面は一般に特異点をもつ. 本講演では大円織面がこれらの特異点をもつ必要十分条件を前節の不変量 c_i ($i = 1, \dots, 6$) で書き, そこから見えてくる特異点の条件間の双対性に関して言及する.



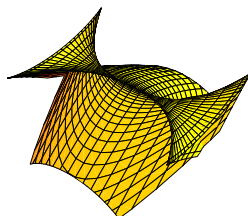
ホイットニーの傘



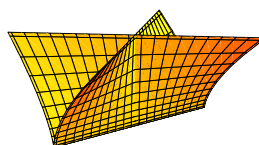
カスプ辺



スワローテイル



カスプ的くちばし



カスプ的交差帽子

参考文献

- [1] S. Izumiya, K. Saji and T. Nagai, *Great circular surfaces in the three-sphere*, *Differential Geom. Appl.* **29** (2011), 409-425.