An orbit decomposition for spherical 4-symmetric spaces *

笹木 集夢 (東海大学理学部数学科) †

1 導入

連結な非コンパクト簡約リー群 G とその閉部分群 H，極大コンパクト部分群 K に対し，次の問題を考える：

問題 1. 両側剰余空間 $K\backslash G/H$ を具体的に記述せよ.

$K = H$ とき，両側剰余空間分解は G のカルタン分解に他ならない．また，H が (極大コンパクト部分群とは限らない一般の) 対称部分群のときにも $G = KAH$ となる可換群 A が存在することが知られている (これを一般化されたカルタン分解と呼んでいる [2]) [1]. 一方で，G/H が対称空間ではないとき，$G = KAH$ を満たす $A \subset G$ の存在に関する一般論は知られておらず，存在したとしても A が群であることすら期待できない.

本講演では，(G, H) がともに複素リー群 $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ で以下の Cases I–III に対して問題 1 の答えを与える：

(I) $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}}, G_u) = (SL(2n+1, \mathbb{C}), Sp(n, \mathbb{C}), SU(2n+1))$.

(II) $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}}, G_u) = (Sp(n+1, \mathbb{C}), SO(2, \mathbb{C}) \times Sp(n, \mathbb{C}), Sp(n+1))$.

(III) $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}}, G_u) = (SO(2n+1, \mathbb{C}), GL(n, \mathbb{C}), SO(2n+1))$.

上のリストは，$G_{\mathbb{C}}$ の極大コンパクト部分群 $K = G_u$ も合わせてリー群の 3 つ組 $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}}, G_u)$ で表記している[2].

2 背景

本講演で扱う 3 つの複素等質空間に対して問題 1 を考える背景として，次の 3 つが挙げられる.

---

*研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2011」(東京理科大学森戸記念館第 1 フォーラム：2011 年 9 月 2 日–3 日) における講演アブストラクト.

†E-mail: `atsumu@tokai-u.jp`

本研究は科研費 (22740029) の助成を受けたものである.

[1] 可換群 A の次元は対称空間 G/H の実次元 $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\, G/H$ で与えられる.

[2] 複素簡約リー群に対して，コンパクト実型は極大コンパクト部分群となる．この意味で K の代わりに G_u という記号を用いている.

2.1 Spherical 等質空間

Cases I–III の $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ は，複素等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ が 'spherical' とよばれる特別なクラスに属する．

簡約な複素等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ が spherical であるとは，複素簡約リー群 $G_{\mathbb{C}}$ のボレル部分群の作用によって $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ 内に開軌道をもつことをいう．複素対称空間は spherical である．複素等質空間で spherical なものは，既約な場合は Krámer [8] によって，可約な場合は Brion [1] によって分類された．

一方で，Vinberg–Kimelfeld [14] によって，複素等質空間が spherical であることは，その上の正則関数全体の空間に自然に定義される $G_{\mathbb{C}}$ の表現が重複なく既約分解されることと同値であることが知られている[3].

2.2 可視的作用

'重複のない表現' は既約表現を一般化した概念である．テーラー展開，フーリエ変換，球関数による展開など古典的に知られている定理は，その背景に重複のない表現が隠れている．逆に，重複のない表現をもつ表現空間にはこれらのような自然な展開定理が存在するであろうと期待される．

小林俊行氏は '複素多様体における可視的作用' という概念を導入し，重複のない表現に対して統一的な説明を与える，という新しい視点からの研究を開始した ([4, 7] など).

リー群 G の連結な複素多様体 D における正則な作用が強可視的であるとは，次を満たす $S \subset D$ と D 上の反正則微分同相 σ が存在するときをいう：$D = G \cdot S$，$\sigma_S = \mathrm{id}_S$，$\sigma(x) \in G \cdot x$ $(\forall x \in D)$ ([4, Definition 3.3.1])．1 次元トーラス $\mathbb{T}$ の $\mathbb{C}$ への標準作用は $S = \mathbb{R}$, $\sigma(z) = \overline{z}$ $(z \in \mathbb{C})$ によって強可視的である．

論文 [4] には，上の例を含めた様々な例が紹介されている．エルミート対称空間における研究は [6] でなされた．作用が線型な場合は [9, 13] で行われ，強可視的な線型作用の分類が与えられた．A 型の一般化された旗多様体に対する研究は [5] にある．対称ではない複素等質空間における研究は，$SL(m+n,\mathbb{C})/SL(m,\mathbb{C}) \times SL(n,\mathbb{C})$，$SO(4n+2,\mathbb{C})/SL(2n+1,\mathbb{C})$，$E_6(\mathbb{C})/Spin(10,\mathbb{C})$ については [10] に[4]，$SO(8,\mathbb{C})/G_2(\mathbb{C})$ は [11] で行われた．また，$SL(2n+1,\mathbb{C})/Sp(n,\mathbb{C})$ (Case I) については論文 [12] にまとめた[5].

2.3 4-対称空間

本講演で扱う 3 つの複素等質空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ のもう１つの特徴として '4-対称空間' であることが挙げられる．

一般に，等質空間 G/H が n-対称空間であるとは，G 上の位数 n の自己同型 θ が存在して，$(G^{\theta})_0 \subset H \subset G^{\theta}$ を満たすときをいう[6]．2-対称空間は通常の対称空間に他ならない．

---

[3] 表現が重複がないとは，表現の既約分解において各既約成分が高々1 度しか現れないことをいう．

[4] これらの複素等質空間は，非管状型エルミート対称空間 G/K の複素化 $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ に対し，非対称シュタイン多様体 $G_{\mathbb{C}}/[K_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}]$ として実現される．これは，複素対称空間 $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ 上の $\mathbb{C}^{\times}$-束と解釈することができる (cf. (2.1)).

[5] 昨年度の本研究集会において，両側剰余空間 $SU(2n+1)\backslash SL(2n+1,\mathbb{C})/Sp(n,\mathbb{C})$ に関する結果を紹介させていただいた．

[6] θ が位数 n であるとは，$k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $\theta^k \neq \mathrm{id}$ かつ $\theta^n = \mathrm{id}$ を満たすことをいう．

等質空間 G/H が対称空間ではない 4-対称空間とし，θ を位数 4 の自己同型とする．このとき，θ^2 は対合的自己同型より，$K = G^{\theta^2}$ とすると G/K は対称空間となり，次のファイバー束の構造をもつ：

$$K/H \to G/H \to G/K. \tag{2.1}$$

また，θ を K に制限した $\theta|_K$ は K 上の対合的自己同型となるため，ファイバー K/H も対称空間である．底空間，ファイバーがともに対称空間であることは，本講演の主結果 (定理 3 参照) の証明において核となる．

既約なリーマン 4-対称空間は Jimènez [3] によって分類された[7]．既約なリーマン 4-対称空間の分類および spherical な既約複素等質空間の分類を比較すると，次の事実が分かる．

命題 2 ([3, 8])**.** Spherical な既約 4-対称空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は Cases I–III のいずれかに限る．

3 主結果

Spherical な既約 4-対称空間に対する問題 1 は以下の定理によって解決される．

定理 3. 連結な複素単純リー群とその複素閉部分群の組 $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ を Cases I–III のいずれかとする．このとき，一般化されたカルタン分解

$$G_{\mathbb{C}} = G_u A H_{\mathbb{C}} \tag{3.1}$$

を満たす ‘スライス’ $A \subset G_{\mathbb{C}}$ が存在する．特に，A は以下で与えられる．

$$A \simeq \begin{cases} \mathbb{R} \cdot \underbrace{\mathbb{T} \cdot \cdots \cdot \mathbb{T}}_{n-1} \cdot \mathbb{R}^n & \text{(Case I)} \\ \mathbb{R} \cdot \mathbb{R} & \text{(Case II)} \\ \mathbb{R} \cdot \underbrace{\mathbb{T} \cdot \cdots \cdot \mathbb{T}}_{[\frac{n-1}{2}]} \cdot \mathbb{R}^{[\frac{n}{2}]} & \text{(Case III)} \end{cases}. \tag{3.2}$$

ただし，$m \in \mathbb{Z}$ に対し $[\frac{m}{2}] \in \mathbb{Z}$ は $\frac{m}{2}$ を超えない最大の整数を表す．

定理 3 によって，既約 4-対称空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ の両側剰余空間 $G_u \backslash G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ の代表元は A から選ぶことができる．このことから，spherical な既約 4-対称空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ における各 G_u-軌道は $S := AH_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ と交叉することが分かる[8]．

注意 4. 定理 3 の A は群ではない．

本講演では，定理 3 の証明について解説する予定である．証明の鍵は，底空間およびファイバーに対する一般化されたカルタン分解 ([2])，および小林氏によって提唱された ‘編み上げの手法’ による A の構成である ([5])．

時間が許せば，次の定理 3 について紹介したい．

定理 5. 連結な複素単純リー群とその複素閉部分群の組 $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ を Cases I–III のいずれかとする．このとき，$G_{\mathbb{C}}$ のコンパクトな実型 G_u の 4-対称空間 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ への作用は強可視的である．

[7] [3] で与えた分類は，単連結なコンパクト単純リー群とその 4-対称部分群の組を与えた．

[8] S は $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ の部分多様体であると予想しているが，まだその証明を与えることができていない．

参考文献

[1] M. Brion, Classification des espaces homogènes sphériques, *Compositio Math.* **63** (1987), 189–208.

[2] M. Flensted–Jensen, Spherical functions of a real semisimple Lie group. A method of reduction to the complex case, *J. Funct. Anal.* **30** (1978), 106–146.

[3] J. Jimènez, Riemannian 4-symmetric spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **306** (1988), 715–734.

[4] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 497–549, special issue commemorating the fortieth anniversary of the founding of RIMS.

[5] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3))\backslash U(n)/(U(p) \times U(q))$, *J. Math. Soc. Japan* **59** (2007), 669–691.

[6] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, *Transform. Groups* **12** (2007), 671–694.

[7] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-free property for holomorphic vector bundles, *preprint*, arXiv: math.RT/0607004.

[8] M. Krämer, Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen, *Composito Math.* **38** (1979), 129–153.

[9] A. Sasaki, Visible actions on irreducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not.* **18** (2009) 3445–3466, doi: 10.1093/imrn/rnp060.

[10] A. Sasaki, A characterization of non-tube type Hermitian symmetric spaces by visible actions, *Geom. Dedicata* **145** (2010), 151–158.

[11] A. Sasaki, Visible actions on the non-symmetric homogeneous space $SO(8, \mathbb{C})/G_2(\mathbb{C})$, *Adv. Pure Appl. Math.* (2010), 14 pages, doi: 10.1515/APAM.2010.039.

[12] A. Sasaki, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $SU(2n + 1)\backslash SL(2n + 1, \mathbb{C})/Sp(n, \mathbb{C})$, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **17** (2010), 201–215.

[13] A. Sasaki, Visible actions on reducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not.* (2011), 885–929.

[14] É. Vinberg, B. Kimelfeld, Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple Lie groups, *Funct. Anal. Appl.* **12** (1978), 168–174.