一般余次元平均曲率流の
トランスレーティングソリトン

國川 慶太　(東北大学)*

1. トランスレーティングソリトン

1.1. 平均曲率流と特異点

滑らかな多様体 M^n のユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+m}$ へのはめ込みの 1 変数係数族 $F : M^n \times [0, t_0) \to \mathbb{R}^{n+m}$ を考える．このとき平均曲率流方程式とは

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}(p,t)\right)^{\perp} = \vec{H}(p,t),$$

で与えられる偏微分方程式である．ただし $\vec{H}$ は平均曲率ベクトル, $(\cdot)^{\perp}$ は法成分を表す. 平均曲率流は部分多様体の体積汎関数の勾配流であり, 部分多様体の体積を最も効率良く減らす変形になっている．したがって, 数多くある幾何学的フローの中でも特に重要な対象として多くの幾何学者, 解析学者によって研究されてきた.

一般に, 平均曲率流は有限時間で特異点 (第 2 基本形式のノルムが発散する点) をもつ. 有限時間で特異点が現れると, その時刻以降の解析は困難となる. 特異点発生後に平均曲率流がどのように振る舞うかは大変興味深い問題ではあるが, そのような問題に取り組むためにも，まずはそもそもどのような特異点が現れるのかを調べることが重要である.

特異点は Type I と Type II に分類されている．特に Type II 特異点周辺をスケール変換すると $F(p,t) = F(p,0) + tT$ という形の特殊な解が現れる．ただし $T \in \mathbb{R}^{n+m}$ は定ベクトルとする．このとき, 各時刻 t での部分多様体 $M_t \subset \mathbb{R}^{n+m}$ は

$$\vec{H} = T^{\perp}$$

を満たすが, このような部分多様体をトランスレーティングソリトンと呼ぶ. トランスレーティングソリトンは特異点周辺をモデル化したものであり, 平均曲率流を理解するための重要な研究対象となっている．また, 式の形から明らかなように, トランスレーティングソリトンは平均曲率流方程式のもとで, 平行移動を除いて形が変化しないので, その存在時間は $(-\infty, \infty)$ である．このような解を永久解 (eternal solution) と呼ぶ.

注意 1. TypeI 特異点周辺のスケール変換をすると, 自己縮小解 (セルフシュリンカー) が現れる．自己縮小解に関してはトランスレーティングソリトンに比較して, 多くの結果が知られている．自己縮小解から作られる平均曲率流の解の存在時間は $(-\infty, 0]$ である.

1.2. 余次元が高い場合の問題

トランスレーティングソリトンの形を調べることは平均曲率流の特異点の理解へとつながっているため, 超曲面 $(m = 1)$ の場合には比較的多くの先行研究がなされてきた

2010 Mathematics Subject Classification: 53C44, 35C06
キーワード：Mean curvature flow, translating soliton, Bernstein 型定理
* 〒980-8578 宮城県仙台市青葉区荒巻字 6 番 3 号　東北大学 大学院理学研究科 数学専攻
e-mail: sb1m16@math.tohoku.ac.jp

[3]. ところが余次元が上がった場合 ($m \geq 2$) の平均曲率流, 及び関連する部分多様体の研究はまだまだ未開拓である. これは第2基本形式や平均曲率ベクトルの振る舞いが著しく複雑になることに起因する. しかしその困難さに反して, 一般余次元の平均曲率流 (特にラグランジュ平均曲率流など) の研究は近年重要性を増している [2], [10], [13].

2. Bernstein 型問題

2.1. 極小曲面の Bernstein 問題

多様体の形を特徴付ける定理は多数あるが, 重要なものの一つに極小曲面に関する Bernstein の定理がある. これは3次元ユークリッド空間内で無限に広がる極小曲面のグラフが実は自明なものに限るというものである. この定理には次元や余次元が高くなると反例があるが, 適切な仮定のもとではやはり成立することが知られている. 特にガウス写像の収まる範囲が制限されている場合, 実は自明なものしか存在しないという結論が得られる. 一般余次元では多様体の接平面をグラスマン多様体へと写像する一般化されたガウス写像を扱うことがキーポイントとなる [4].

2.2. トランスレーティングソリトンの Bernstein 型問題

極小部分多様体は平均曲率流のもとで, “永久に止まっているトランスレーティングソリトン” と見なせるので, トランスレーティングソリトンは極小部分多様体のある種の一般化でもある. したがって, トランスレーティングソリトンにおいても Bernstein 型の定理が成り立つかを問うことは自然である. またトランスレーティングソリトンが存在し得るガウス写像の像の範囲を正確に求めることができれば, その形状をある程度把握することができる. これについては Bao-Shi[1] たちの超曲面に関する先行研究がある.

定理 (Bao-Shi[1], 2014)**.** $M^m \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を完備なトランスレーティングソリトンとする. もし M^m のガウス写像の像が球面 $\mathbb{S}^n$ 内の半径 $\Lambda < \pi/2$ の閉球 $B_\Lambda^{\mathbb{S}^n}$ に収まっていれば M^n は超平面である.

この講演の主結果の一つ目は, Bao-Shi の定理の一般余次元への拡張である. まず以下の準備をする. $M^n \subset \mathbb{R}^{n+m}$ を部分多様体とする. M^n に沿った正の向きの正規直交枠 $\{e_i\} \subset TM$ をとり, これを一般化されたガウス写像によりグラスマン多様体の元 $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ に写像する. また $\mathbb{R}^{n+m}$ 内の n 次元平面 $A = a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ を1つ固定し, これに対して w-関数を次で定める.

$$w = w_A := \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \rangle = \det(\langle e_i, a_j \rangle).$$

もし w_A が正であれば, M^n は n 次元平面 A 上のグラフ, $M^n = \{(x, u(x)) | x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ で表すことができる. このとき

$$v := \frac{1}{w} = \sqrt{\det(\delta_{ij} + \sum_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j})}$$

は M^n の体積要素の係数 $\sqrt{\det(g_{ij})}$ であり, グラフの傾きを表す関数になっている. 逆に M^n がグラフであれば, $w > 0$ である. この w-関数を使うと, Bernstein 型の結果は次のように述べられる.

主定理 1 ([6] 参照)**.** 関数の組 $u^\alpha(x^1,\cdots,x^n)$, $\alpha=1,\cdots,m$, で与えられる法束平坦なトランスレーティングソリトンの全グラフ (*entire graph*), $M^n=\{(x,u(x))|x\in\mathbb{R}^n\}\subset\mathbb{R}^{n+m}$ で, v が次の条件

$$v=o(R^{\frac{1}{2}}),\quad (R\to\infty) \tag{1}$$

を満たしているものはアファイン部分空間に限る. ただし, $R=(|x|^2+|u(x)|^2)^{\frac{1}{2}}$.

注意 2. すべての超曲面は自明に法束平坦になっている. したがって主定理はBao-Shiたちの一般化と見なせる. また最近, Xin[14] は v の増大度により強い条件を課すことで法束平坦性の仮定を外している.

注意 3. 主定理の v の条件 (1) は最良である. 実際, 回転対称で凸なトランスレーティングソリトンの超曲面で全グラフになっているものが存在するが, そのトランスレーティングソリトンにおける v の増大度は $v\sim CR^{\frac{1}{2}}$ である.

注意 4. この主定理の証明はそのまま極小曲面 (極小部分多様体) に対しても有効であり, 我々の結果の系として極小曲面に関するガウス写像の制限付きの Bernstein 型定理を得る.

2.3. 永久解の Bernstein 型定理

上述の通り, トランスレーティングは平均曲率流の永久解になっている. 実は, Type II 特異点周辺のスケール変換の後には一般に永久解 (トランスレーティングソリトンとは限らない) が現れる. したがって Type II 特異点を調べるためには永久解を扱う方がより自然である. ここでは超曲面の場合に, 永久解に関する Bernstein 型の定理を紹介する.

主定理 2 ([7] 参照)**.** $F:M^n\times(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}^{n+1}$ を全グラフで表された平均曲率流の永久解とする. ある定数 C_1,C_2 で

$$v(p,t)=\sqrt{1+|\nabla u(p,t)|^2}\le C_1,\quad |\vec{H}(p,t)|\le C_2,\quad \forall(p,t)\in M^n\times(-\infty,\infty)$$

なるものが存在するとき, $M_t=F(M^n,t)$ は超平面である.

実は主定理 2 と類似の結果がラグランジュ平均曲率流の永久解について成り立つ. このことについて以下で説明する.

Smoczyk はケーラー · アインシュタイン多様体の中のラグランジュ部分多様体は平均曲率流の下でラグランジュ部分多様体のまま変形することを示した [9]. 平均曲率流は部分多様体の体積を最も効率良く減らす変形であったことを思い出すと, 特にカラビ · ヤウ多様体の中のラグランジュ平均曲率流の収束先として, 特殊ラグランジュ部分多様体を構成できるのではないかと期待されている. ところが, やはり特異点の発生, 余次元が上がったことによる解析の困難さなどの問題があり, それほど研究は進展していない.

こうした状況の中, Chen-Li [2] と M.-T. Wang [13] らはカラビ · ヤウ多様体の中のラグランジュ部分多様体で almost calibrated という条件を満たす平均曲率流を考察した. カラビ · ヤウ多様体内の almost calibrated ラグランジュ部分多様体とは以下の条件を満たすラグランジュ部分多様体である:

$$\cos\theta>0,$$

ここでθはラグランジュ角である(ケーラー角ではない). 彼らは, almost calibrated という条件が平均曲率流の下で保たれ, さらにこの条件の下では有限時間でType I特異点は現れないことを示した. つまりこの場合, Type II特異点の研究がより重要ということになる.

ラグランジュトランスレーティングソリトンに関する非存在定理としては以下のものが知られていた.

定理 (Han-Sun [5], 2010)**.** $\mathbb{C}^2$内の断面曲率が非負な完備*almost calibrated*ラグランジュトランスレーティングソリトンで,

$$\cos\theta \geq \delta > 0$$

を満たすものは平面である. ただし, $\delta > 0$はある定数.

彼らの定理によれば, ラグランジュ平均曲率流の下では, 非負断面曲率かつ$\cos\theta \geq \delta > 0$であるようなトランスレーティングソリトンは, Type II 特異点のスケール変換としては現れないということがわかる. しかし, 一般にはType II特異点のスケール変換としては永久解が現れるということしかわからないのだから, 永久解について言及しておいたほうが良いと考えられる. 主定理2と類似の手法をalmost calibratedラグランジュ平均曲率流の場合に適用することにより, 永久解について次のことがわかった.

主定理 3. 各時刻で非負断面曲率な完備*almost calibrated*ラグランジュ平均曲率流の永久解$\{M_t\} \subset \mathbb{C}^2$, $t \in (-\infty, \infty)$で,

$$\cos\theta \geq \delta > 0$$

を満たすものは自明解に限る(全ての時刻で平面). ただし, $\delta > 0$はある定数.

3. 一般余次元トランスレーティングソリトンの新しい例の構成

ここまでの話は, 非存在定理という立場からトランスレーティングソリトンを特徴付けるものであったが, 逆に一般余次元で具体例を構成することや, 曲率などの条件のもとでの特徴付けもトランスレーティングソリトンの研究には重要である. これまでトランスレーティングソリトンの具体例はあまり知られていなかったが, ここでは球面内の極小部分多様体の利用と, 偏微分方程式を常微分方程式に落とし込むことにより, 一般余次元では多くの非自明な具体例を構成することができることを紹介する.

主定理 4 ([8] 参照)**.** $N^{n-1} \subset \mathbb{S}^{n+m-2}(1) \subset \mathbb{R}^{n+m-1}$を球面内の極小部分多様体とするとき, 次のはめ込みは$T = (0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+m}$方向のトランスレーティングソリトンになる. $F : \mathbb{R}_+ \times N^{n-1} \to \mathbb{R}^{n+m}$; $F(s, q) = (sq, r(s))$. ただし, $r(s)$は次の2階常微分方程式の解とする:

$$\ddot{r}(s) = \big(1 + \dot{r}(s)^2\big)\left(1 - \frac{(n-1)\dot{r}(s)}{s}\right). \tag{2}$$

例 1. $r(s)$を$n = 3$のときの(2)の解とする. このとき次のはめ込みは法束平坦な$T = (0, 0, 0, 0, 1)$方向のトランスレーティングソリトンである.

$$F(s, x, y) := \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\cos x, \frac{s}{\sqrt{2}}\sin x, \frac{s}{\sqrt{2}}\cos y, \frac{s}{\sqrt{2}}\sin y, r(s)\right) \in \mathbb{R}^5.$$

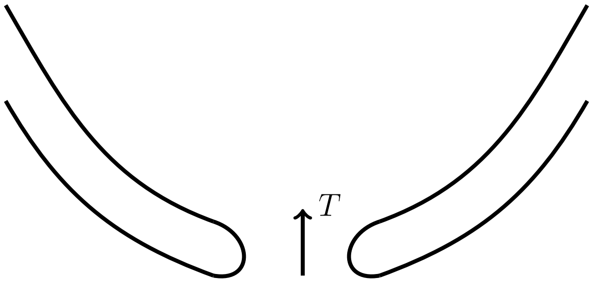

図 1: Wing-like curves

ここで (x, y) は クリフォードトーラス $S^1(1/\sqrt{2}) \times S^1(1/\sqrt{2}) \subset S^3(1) \subset \mathbb{R}^4$ の局所座標である．さらに $r(s)$ として翼型曲線 (図 1) をとれば, 余次元 2 の完備で法束平坦なトランスレーティングソリトンを得る.

4. トランスレーティングソリトンの分裂定理

実は, 主定理 3 のトランスレーティングソリトンは主法方向 $(\nu := \vec{H}/|\vec{H}|, (|\vec{H}| \neq 0))$ が平行 $(\nabla^{\perp}\nu \equiv 0)$ という性質をもつ．他にも主法方向が平行なものとして次の例がある．

例 2. $N^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+m-2}$ を完備極小部分多様体, $\gamma(s) = \{(s, r(s)) | -\pi/2 < s < \pi/2\} \subset \mathbb{R}^2$ をグリムリーパー $(r(s) = -\log\cos s$ で与えられる 1 次元トランスレーティングソリトン; 図 2) とする．このとき直積はめ込み

$$M^n = N^{n-1} \times \gamma \subset \mathbb{R}^{n+m-2} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{n+m}$$

は $T = (0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+m}$ 方向の完備トランスレーティングソリトンである．このトランスレーティングソリトンは主法方向が平行で, さらに $|P|^2 \equiv |\vec{H}|^4$ という条件をみたす．ここで $P = \langle B, \vec{H} \rangle$ は平均曲率ベクトル方向の第 2 基本形式である．条件 $|P|^2 \equiv |\vec{H}|^4$ は超曲面の場合, スカラー曲率の平坦性に帰着する.

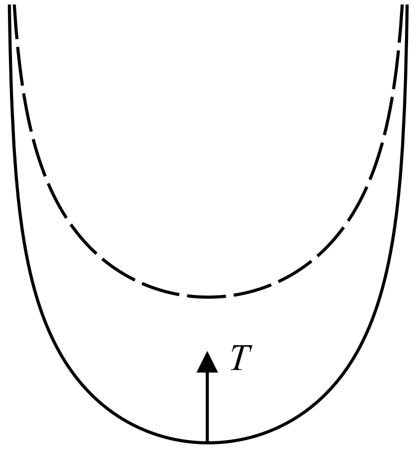

図 2: Two grim reapers

最後に, この例の逆として以下の分裂定理を紹介する.

主定理 5 ([8] 参照). 完備なトランスレーティングソリトン $M^n \subset \mathbb{R}^{n+m}$ で主法方向が平行かつ $|P|^2/|\vec{H}|^4$ が M^n 上で最大値をとるものは, 完備極小部分多様体 $N^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+m-2}$ とグリムリーパー $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ の直積はめ込み

$$M^n = N^{n-1} \times \gamma \subset \mathbb{R}^{n+m-2} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{n+m}$$

に限る.

注意 5. 主定理 4 は Smoczyk が自己縮小解 (self-shrinker) について示したもの [11] のトランスレーティングソリトン版である. また Martin, Savas-Halilaj, Smoczyk たち [12] は 2014 年に超曲面の場合にトランスレーティングソリトンの分裂定理を示している. 主定理 4 は彼らの定理を一般余次元へ拡張したものである.

参考文献

[1] C. Bao, Y. Shi, *Gauss map of translating solitons of mean curvature flow*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 142 (2014), No. 12, 4333–4339.

[2] J. Chen-J. Li, *Mean curvature flow of surface in 4-manifolds*, Adv. Math. Vol. 163 (2001), 287–309.

[3] G. Huisken, C. Sinestrari, *Convexity estimates for mean curvature flow and singularities of mean convex surfaces*, Acta Math., Vol. 183 (1999), No. 1, 45–70.

[4] J. Jost, Y. L. Xin, L. Yang, *The Gauss image of entire graphs of higher codimension and Bernstein type theorems*, Calc. Var. Partial Differential Equations, Vol. 47 (2013), No. 3–4, 711–737.

[5] X. Han-J. Sun, *Translating solitons to symplectic mean curvature flows*, Ann. Glob. Anal. Geom., Vol. 38 (2010), 161–169.

[6] K. Kunikawa, *Bernstein-type theorem of translating solitons in arbitrary codimension with flat normal bundle*, Calc. Var. Partial Differential Equations (to appear).

[7] K. Kunikawa, *A Bernstein type theorem of ancient solutions to the mean curvature flow*, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).

[8] K. Kunikawa *Translating solitons in arbitrary codimension, preprint* (submitted).

[9] K. Smoczyk, *Der Lagrangesche mittlere Kruemmungsfluss*, Univ. Leipzig (Habil.-Schr.), 102 S. (2000).

[10] K. Smoczyk, *Mean curvature flow in higher codimension -Introduction and survey-*, Global Differential Geometry(Ed. C. Bär, J. Lohkamp, M. Schwarz), Springer Proc. Math., Vol. 17, 231–274, Springer, Heidelberg, (2012).

[11] K. Smoczyk, *Self-shrinkers of the mean curvature flow in arbitrary codimension*, Int. Math. Res. Not. IMRN, Vol. 48 (2005), 2983–3004.

[12] F. Martin, A. Savas-Halilaj, K. Smoczyk, *On the topology of translating solitons of the mean curvature flow*, http://arxiv.org/abs/1404.6703, (2014).

[13] M.-T. Wang, *Mean curvature flow of surfaces in Einstein four manifolds*, J. Diff. Geom., Vol. 57 (2001), 301–338.

[14] Y.L. Xin, *Translating solitons of the mean curvature flow*, Calc. Var. Partial differential Equations (to appear).