重調和部分多様体とその拡張

笹原徹 (八戸工業大学)

1 序

2 つのリーマン多様体間の写像が調和写像からどの程度ずれているかを表す量として, 張力場の 2 乗積分 (これを重エネルギー汎関数とよぶ) が挙げられる. この臨界点を重調和写像とよぶ ([14]). 1986 年, Giang [20] は重エネルギー汎関数に関する第一変分公式と第二変分公式を導き, さらに球面の非調和 (非極小) な重調和部分多様体 (重調和等長はめこみの像) の例を構成した。

1980 年代後半, これとは別に B.-Y. Chen によりユークリッド空間内において重調和部分多様体の概念が導入された. それらは, 位置ベクトルの各成分が重調和関数であるものとして定義されるが, Giang の論文で外空間をユークリッド空間とした場合の重調和部分多様体の定義と一致する. Chen は 3 次元ユークリッド空間の重調和曲面は極小曲面であることを証明し, これをもとに「ユークリッド空間内の重調和部分多様体は極小部分多様体である」という予想を提出した. この予想は未解決のままである.

Giang の論文は中国語で書かれていたため, 当時この内容はあまり広く知られていなかったようである (現在は浦川肇先生による英訳 [20] が出版されている). 実際, 1990 年代の重調和部分多様体に関する論文は, Chen 予想に対する部分的な解答がほとんどである. 2001 年, Caddeo らにより, 3 次元実空間形の非極小な重調和曲面が完全に決定された ([8])。これを皮切りに, 重調和部分多様体の研究が広く知られるようになり, ここ 15 年近くの間に多くの興味深い論文が発表されてきた.

本稿では, 実, 複素, 佐々木空間形内の非極小な重調和部分多様体に関する分類結果をいくつか紹介するとともに, 重調和部分多様体の拡張概念である quasi-biharmonic 部分多様体と tangentially biharmonic 部分多様体に関する最近の結果についても紹介する.

2 重調和写像

定義 2.1. リーマン多様体間の写像 $f:(M,g)\to(N,h)$ に対してエネルギー汎関数は次式で定義される.

$$E(f)=\frac{1}{2}\int|df|^2dv_g.$$

E の臨界点を調和写像という.

E に対するオイラー・ラグランジュ方程式は次で与えられる.

$$\tau(f):=\sum\{\nabla^f_{e_i}df(e_i)-df(\nabla_{e_i}e_i)\}=0,$$

ここで, ∇^f は誘導接続, $\{e_i\}$ は M の正規直交基底, ∇ は M の Levi-Civita 接続である.

写像 f が等長はめ込みのときは, f が調和写像であることと M が N の極小部分多様体であることは同値である.

定義 2.2. リーマン多様体間の写像 $f:(M,g)\to(N,h)$ に対して重エネルギー汎関数は次式で定義される.

$$E_2(f)=\frac{1}{2}\int|\tau(f)|^2dv_g.$$

E_2 の臨界点を重調和写像とよぶ.

定理 2.1 ([20])**.** E_2 に対するオイラー・ラグランジュ方程式は次で与えられる.

$$\tau_2(f):=-\Delta^f\tau(f)+\mathrm{Trace}_g R^N(\tau(f),df)df=0,$$

ここで, $\Delta^f=-\mathrm{Trace}_g(\nabla^f\nabla^f-\nabla^f_{\nabla})$, $\quad R^N(X,Y)Z=[\nabla^N_X,\nabla^N_Y]Z-\nabla^N_{[X,Y]}Z$, ∇^N は N の Levi-Civita 接続である. この方程式を重調和方程式とよぶ.

写像 f が重調和な等長はめ込みのとき, M を N の重調和部分多様体とよぶ. 極小部分多様体は重調和部分多様体である. 非極小な重調和部分多様体を proper 重調和部分多様体とよぶ.

3 実空間形の重調和部分多様体

$N^n(c)$ を定曲率 c の実空間形, ただし $c\in\{-1,0,1\}$, とする. つまり, $N^n(1)=S^n(1)$, $N^n(0)=\mathbf{R}^n$, $N^n(-1)=H^n(-1)$.

命題 3.1. $f:M^m\to N^n(c)$ を等長はめ込みとする. f が重調和 $\Longleftrightarrow$ $\Delta^fH=mcH$. ここで H は平均曲率ベクトル場である.

等長はめ込み $f:M\to\mathbf{R}^n$ に対して $f=(f_1,\dots,f_n)$ とおくと, f が重調和 $\Longleftrightarrow$ $\Delta^2f_i=0$ $(i=1,\dots,n)$. ここで, Δ は M の関数に作用するラプラス作用素である.

命題 3.2 ([3])**.** $\Delta^fH=mcH$ $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases}\Delta^{\perp}H+\mathrm{trace}\,h(\cdot,A_H\cdot)-mcH=0 & (\text{法方向}),\\ 4\mathrm{trace}A_{\nabla^{\perp}_{(\cdot)}H}(\cdot)+m\mathrm{grad}|H|^2=0 & (\text{接方向}).\end{cases}$$

ここで, $\Delta^{\perp}$ は法接続 $\nabla^{\perp}$ に関するラプラシアン, h は第二基本形式, A_H は H 方向の形作用素である.

もし H が平行ならば, 上記の方程式の接方向は消えるため, 重調和方程式は

$$\mathrm{Trace}_g h(\cdot,A_H\cdot)=0$$

となる. また, 超曲面のとき, $H=\alpha V$ (V は単位法ベクトル) とおくと命題 3.2 の方程式は

$$\begin{cases}\Delta\alpha-(mc-|A_V|^2)\alpha=0,\\ 2A_V(\mathrm{grad}\alpha)+m\alpha\mathrm{grad}\alpha=0\end{cases}$$

と書ける.

外空間が $\mathbf{R}^n$ の場合は, 次の未解決予想がある.

予想 1 (Chen)**.** $\mathbf{R}^n$ の重調和部分多様体は極小部分多様体である.

同様に, $H^n(-1)$ 内にも proper 重調和部分多様体は見つかっていない. これをもとに Caddeo, Montaldo, Piu らは「断面曲率が非正の多様体内の重調和部分多様体は極小部分多様体である」と予想した. しかし, この予想に関しては次の反例が見つかった.

定理 3.1 ([23])**.** $\mathbf{R}^5_+ = \{(x_1, \ldots, x_4, z) \in \mathbf{R}^5 : z > 0\}$,
$g = (Az+B)^{-2t}(\sum_{i=1}^4 dx^2 + dz^2), \quad A > 0, \quad B > 0, \quad t \in \Big(0, \dfrac{1}{2}\Big).$
$\Longrightarrow$ $(\mathbf{R}^5_+, g)$ の断面曲率は負. このとき,

$$\phi(x_1, \ldots, x_4) = \Big(x_1, \ldots, x_4, \sum_{i=1}^4 a_i x_i + c\Big), \quad \sum_{i=1}^4 a_i^2 = \frac{2t}{1-2t}, \quad c > 0,$$

は proper 重調和超曲面となる.

以下, S^n の重調和部分多様体に関する重要な分類結果をいくつか紹介する.

定理 3.2 ([8])**.** $S^3(1)$ の proper 重調和曲面は, $S^2\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ の一部である.

定理 3.3 ([3])**.** $S^{m+1}(1)$ の主曲率が 2 個の proper 重調和超曲面は $S^{m_1}\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) \times S^{m_2}\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$, $m_1 + m_2 = m$, $m_1 \neq m_2$ の一部である.

定理 3.4 ([4])**.** $S^{m+1}(1)$ の主曲率が 3 個の *compact* な proper 重調和超曲面は存在しない.

CMC (constant mean curavrure) 重調和部分多様体の平均曲率 $|H|$ には次のように上限がある.

定理 3.5 ([18])**.** M^m を $S^n(1)$ の proper 重調和部分多様体とする. もし CMC ならば, $|H| \leq 1$ が成り立つ. さらに $|H| = 1 \Longleftrightarrow M^m$ は $S^{n-1}\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) \subset S^n(1)$ の極小部分多様体である.

$\iota : S^n(1) \to \mathbf{R}^{n+1}$ を包含写像とする. 定理 3.5 より, $|H| = 1$ の proper 重調和等長はめ込み $f : M^m \to S^n(1)$ は次のように書き表せる.

$$\iota \circ f = f_0 + f_1,$$
$$\text{ここで,}\ f_0\Big(x, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \Big(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big), \quad f_1\Big(x, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = (x, 0).$$

このとき, f_1 は $\Delta f_1 = 2m f_1$ をみたす.
平均曲率が $|H| < 1$ のときは, proper 重調和等長はめ込みは次のように分解される.

定理 3.6 ([5])**.** $f : M^m \longrightarrow S^n(1)$ を CMC proper 重調等長はめこみとする. このとき, $|H| < 1 \Longleftrightarrow \iota \circ f = f_1 + f_2$. ここで

$$\Delta f_1 = m(1 - |H|) f_1, \qquad \Delta f_2 = m(1 + |H|) f_2,$$
$$\langle f_1, f_2 \rangle = 0, \qquad |f_1| = |f_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

定理 3.7 ([3])**.** $S^n(1)$ の平行な平均曲率ベクトル場をもつ proper 重調和曲面は, $S^{n-1}\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) \subset S^n(1)$ の極小曲面である.

本稿では, これ以降, 平均曲率ベクトル場が平行であるという条件を PMC と書くことにする. 定理 3.5 より, $S^n(1)$ の PMC 重調和部分多様体の平均曲率 $|H|$ は $|H| \leq 1$ をみたすが, 次のように全ての値を取るわけではない.

定理 3.8 ([6])**.** *M^m $(m>2)$ を $S^n(1)$ の PMC proper 重調和部分多様体とする. もし $|H|<1$ ならば, $|H| \leq (m-2)/m$ である. さらに, 等号成立 $\Longleftrightarrow$ M^m は $M_1^{m-1} \times S^1\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) \subset S^{n-2}\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) \times S^1\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) \subset S^n(1)$ の一部. ここで M_1^{m-1} は $S^{n-2}\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ の極小部分多様体である.*

定理 3.9 ([6])**.** *M^m を $S^n(1)$ の PMC proper 重調和部分多様体で $\nabla A_H = 0$ をみたすものとする. このとき, $|H| < (m-2)/m \Longleftrightarrow m>4$ で, M^m は $M_1^{m_1} \times M_2^{m_2} \subset S^{n_1}\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) \times S^{n_2}\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) \subset S^n(1)$ の一部. ここで $m_1+m_2=m$, $m_1 \neq m_2$, $m_i \geq 2$, $n_1+n_2=n-1$, $M_i^{m_i}$ は $S^{n_i}\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ の極小部分多様体である.*

球面の重調和部分多様体に関して以下の予想が提起されているが, いずれも未解決である.

予想 2. $S^{m+1}(1)$ の proper 重調和超曲面は $S^m\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$, または $S^{m_1}\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) \times S^{m_2}\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$, $m_1+m_2=m$, $m_1 \neq m_2$ の一部である.

予想 3. $S^4(1)$ の proper 重調和曲面は $S^3(\frac{1}{\sqrt{2}})$ の極小曲面である.

4 佐々木空間形の重調和部分多様体

奇数次元多様体 M は, 以下の条件をみたす 1-形式 η, ベクトル場 ξ, $(1,1)$ 型テンソル ϕ, 計量テンソル g を許容するとき, 接触リーマン多様体とよばれる.

$$\begin{aligned} &\eta(\xi)=1, \quad \phi^2=-I+\eta\otimes\xi, \\ &g(\phi X,\phi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y), \\ &d\eta(X,Y)=g(X,\phi Y). \end{aligned}$$

さらに, $M \times \mathbf{R}$ 上の概複素構造 $J(X, f\frac{d}{dt}) := (\phi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt})$ が積分可能（ここで f は $M\times\mathbf{R}$ 上の関数）なとき, M を佐々木多様体とよぶ. 正則断面曲率 $K(X\wedge\phi X)$ が一定な佐々木空多様体は佐々木空間形とよばれる.

$S^{2n+1}(1) \subset \mathbf{C}^{n+1}$ を原点中心の単位球面とする. $\mathbf{C}^{n+1}$ の複素構造 J を $JX=iX$ で定める. z を位置ベクトル, g_0 を誘導計量とし, 以下のようにテンソル場を定める.

$$\begin{aligned} &\xi_0 := -Jz, \\ &\eta_0(X) := g_0(\xi_0, X), \\ &\phi_0 := s\circ J, \end{aligned}$$

ここで $s: T_z\mathbf{C}^{n+1} \to T_zS^{2n+1}$ は直交射影である.

このとき $(S^{2n+1}, \phi_0, \xi_0, \eta_0, g_0)$ は正則断面曲率 1 の佐々木空間形である. 佐々木多様体 $(S^{2n+1}, \phi_0, \xi_0, \eta_0, g_0)$ を次のように変形する.

$$\eta = a\eta_0, \quad \xi = \frac{1}{a}\xi_0, \quad \phi=\phi_0, \quad \bar{g} = ag_0 + a(a-1)\eta_0\otimes\eta_0,$$

ここで a は正の数. このとき, $(S^{2n+1}, \eta, \xi, \phi, g)$ は正則断面曲率 $\epsilon = \dfrac{4}{a} - 3 > -3$ の佐々木空間形となる. これを $S^{2n+1}(\epsilon)$ とかく.

佐々木空間形は丹野先生により分類されている. 特に, 次が成り立つ.

定理 4.1 ([34])**.** 正則断面曲率 > -3 の佐々木空間形は $S^{2n+1}(\epsilon)$ と同型である.

佐々木多様体の部分多様体の中で特に重要なものとしてルジャンドル部分多様体がある. 定義は次の通り.

定義 4.1. M^n が佐々木多様体 N^{2n+1} のルジャンドル部分多様体 $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ ξ が M^n に直交.

命題 4.1 ([16])**.** $N^{2n+1}(\epsilon)$ を正則断面曲率 ϵ の佐々木空間形とし, M^n を $N^{2n+1}(\epsilon)$ のルジャンドル部分多様体とする. このとき M^n が重調和部分多様体 $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases}\Delta^{\perp}H + \operatorname{trace} h(\cdot, A_H\cdot) - \dfrac{\epsilon(n+3)+3n-3}{4}H = 0,\\ 4\operatorname{trace}A_{\nabla^{\perp}_{(\cdot)}H}(\cdot) + n\operatorname{grad}|H|^2 = 0.\end{cases}$$

定理 4.2 ([26])**.** $f : M^2 \to N^5(\epsilon)$ を佐々木空間形の proper 重調和ルジャンドル曲面とする. このとき, $\epsilon \geq \dfrac{-11+32\sqrt{2}}{41}$, f は次の式で表される.

$$f(x, y_1, y_2) = \left(\sqrt{\frac{\mu^2}{\mu^2+1}}e^{-\frac{i}{\mu}x}, \sqrt{\frac{1}{\mu^2+1}}e^{i\mu x}y_1, \sqrt{\frac{1}{\mu^2+1}}e^{i\mu x}y_2\right) \subset S^5(\epsilon) \subset \mathbf{C}^3,$$

ここで $y_1^2 + y_2^2 = 1$,

$$\mu^2 = \begin{cases}1 & (\epsilon = 1),\\ \dfrac{5+7\epsilon \pm \sqrt{41\epsilon^2+22\epsilon-47}}{4(3+\epsilon)} & (\epsilon \neq 1).\end{cases}$$

系 4.1. $S^5(1)$ の proper 重調和ルジャンドル曲面は次の式で表される.

$$f(x, y_1, y_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{ix}, e^{-ix}y_1, e^{-ix}y_2) \subset S^5(1) \subset \mathbf{C}^3,$$

ここで $y_1^2 + y_2^2 = 1$.

注意 4.1. (i) 定理 4.2 の $z(x) := \left(\sqrt{\dfrac{\mu^2}{\mu^2+1}}e^{-\frac{i}{\mu}x}, \sqrt{\dfrac{1}{\mu^2+1}}e^{i\mu x}\right)$ は $S^3(\epsilon)$ のルジャンドル曲線であり, $\mu^2 = 1$ のときに限り, 測地線である. さらに, $z(x)$ が $S^3(\epsilon)$ の閉曲線 $\Longleftrightarrow$

$$\epsilon = \frac{-6s^2+5st-3t^2}{2s^2-7st+t^2}, \quad (s,t) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}.$$

(ii) 系 4.1 の曲面は, 球面の PMC でない重調和部分多様体の最初の例 である.

次のクラスは, B.-Y. Chen によって導入された複素空間形内の H-umbilical ラグランジュ部分多様体 (定義 5.2 を参照) のルジャンドル版である.

定義 4.2. M^n を佐々木多様体 N^{2n+1} のジャンドル部分多様体とする. M^n が *H-umbilical* $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $H \neq 0$ で, 形作用素が以下をみたす.

(1) $A_{H/|H|}\phi H = \lambda\phi H, \quad \lambda$ は関数,

(2) $A_{H/|H|}$ は $D(p) = \{X \in T_pM^n | \langle X, \phi H\rangle = 0\}$ 上でただ一つの固有値 $\mu(p)$ をもつ,

(3) $\langle A_{\phi X}Y, Z\rangle = 0, \quad X, Y, Z \in D(p)$.

佐々木空間形の全臍的ルジャンドル部分多様体は全測地的である．佐々木空間形のルジャンドル部分多様体の形作用素 A は $A_{\phi X}Y = A_{\phi Y}X$ $(X, Y \in TM^n)$ をみたすことに注意すれば，H-umbilical は全測地的の次にシンプルな条件といえる．

定理 4.2 の proper 重調和ルジャンドル曲面は H-umbilical である．一般次元佐々木空間形の proper 重調和 H-umbilical ルジャンドル部分多様体は以下のように決定されている．

定理 4.3 ([31])**.** $f : M^n \to N^{2n+1}(\epsilon)$ を proper 重調和 H-umbilical ルジャンドル部分多様体とする．ただし $n \geq 3$．このとき $\epsilon \geq \dfrac{-3n^2 - 2n + 5 + 32\sqrt{n}}{n^2 + 6n + 25}$ (> -3)，f は次のように表される．

$$f(x, y_1, \dots, y_n) = \left(\sqrt{\frac{\mu^2}{\mu^2+1}}e^{-\frac{i}{\mu}x}, \sqrt{\frac{1}{\mu^2+1}}e^{i\mu x}y_1, \dots, \sqrt{\frac{1}{\mu^2+1}}e^{i\mu x}y_n\right) \subset S^{2n+1}(\epsilon) \subset \mathbf{C}^{n+1}.$$

ここで $y_1^2 + \cdots + y_n^2 = 1$,

$$\mu^2 = \begin{cases} 1 \quad (\epsilon = 1), \\ \dfrac{(n+5)\epsilon + 3n - 1 \pm \sqrt{\epsilon^2(n^2+6n+25) + \epsilon(6n^2+4n-10) + 9n^2 - 42n + 1}}{2(3+\epsilon)n} \quad (\epsilon \neq 1). \end{cases}$$

注意 4.2. (i) 定理 4.3 の $z(x) := \left(\sqrt{\frac{\mu^2}{\mu^2+1}}e^{-\frac{i}{\mu}x}, \sqrt{\frac{1}{\mu^2+1}}e^{i\mu x}\right)$ は $S^3(\epsilon)$ のルジャンドル曲線であり，$\mu^2 = 1$ のときに限り，測地線である．さらに，$z(x)$ が $S^3(\epsilon)$ の閉曲線 $\Longleftrightarrow$

$$\epsilon = \frac{-3ns^2 + (3n-1)st - 3t^2}{ns^2 - (5+n)st + t^2}, \quad (s, t) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}.$$

(ii) $\epsilon = \dfrac{-3n^2 - 2n + 5 + 32\sqrt{n}}{n^2 + 6n + 25}$ の場合は，$z(x)$ が $S^3(\epsilon)$ の閉曲線 $\Longleftrightarrow$

$$n = s^2, \quad s \in \mathbf{Z}.$$

佐々木多様体のルジャンドル部分多様体は，全測地的でなければ，$\nabla^\perp h$ の ξ 方向の成分が必ず残る．よって，次の条件を考えることは自然である．

定義 4.3. 佐々木多様体のルジャンドル部分多様体が *C-parallel* $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\nabla^\perp h \parallel \xi$.

定理 4.2 の proper 重調和ルジャンドル曲面は C-parallel である．7 次元佐々木空間形の proper 重調和 C-parallel ルジャンドル部分多様体は Fetcu, Oniciuc らによって分類されている ([16])．その結果は，Baikoussis, Blair らによる C-parallel ルジャンドル部分多様体の分類 [2] を応用しているが，最近，その論文に間違いが見つかった．よって，Fetcu らの分類も間違いとなる．次が正しいと思われる．

定理 4.4. 7 次元佐々木空間形の proper 重調和 C-parallel ルジャンドル部分多様体は，平坦か，H-umbilical である．

平坦な proper 重調和 C-parallel ルジャンドル部分多様体は，$\epsilon > -1/3$ のときに存在する．$\epsilon = 1$ の場合の具体的表示は以下の通りである．$\epsilon \neq 1$ の場合については [16] を参照されたい．

定理 4.5 ([16]). $S^7(1)$ の平坦な 3 次元 proper 重調和 C-parallel ルジャンドル部分多様体は次の式で表される.

$$
\begin{aligned}
f(u,v,w) =& \Big(\frac{1}{\sqrt{6}}\exp(-i\sqrt{5}u), \frac{1}{\sqrt{6}}\exp\Big(i\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}u - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{10}}v\Big)\Big),\\
&\frac{1}{\sqrt{6}}\exp\Big(i\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}u + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}v - \frac{3\sqrt{2}}{2}w\Big)\Big), \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\Big(i\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}u + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}v + \frac{\sqrt{2}}{2}w\Big)\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

ルジャンドル部分多様体と似た概念として次の部分多様体がある.

定義 4.4. M が佐々木多様体の反不変部分多様体 $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ ξ が M^n に接していて, $\phi(TM) \subset T^{\perp}M$.

命題 4.2. M^{n+1} を佐々木空間形 $N^{2n+1}(\epsilon)$ の反不変部分多様体とする. このとき, M^{n+1} が重調和部分多様体 $\Longleftrightarrow$

$$
\begin{cases}
\Delta^{\perp}H + \mathrm{trace}\, h(\cdot, A_H \cdot) - \dfrac{\epsilon(n+3)+3n+1}{4}H = 0,\\
4\mathrm{trace}A_{\nabla^{\perp}_{(\cdot)}H}(\cdot) + (n+1)\mathrm{grad}|H|^2 = 0.
\end{cases}
$$

3 および 5 次元佐々木空間形内の反不変 proper 重調和部分多様体は以下のように決定されている.

定理 4.6 ([15]). $f : M^2 \to N^3(\epsilon)$ を佐々木空間形の proper 重調和反不変曲面とする. このとき, $\epsilon > 1$, $f(M^2)$ は次の一部である.

$$
S^1\Bigg(\sqrt{\frac{B}{A+B}}\Bigg) \times S^1\Bigg(\sqrt{\frac{A}{A+B}}\Bigg) \subset S^3\Big(\frac{4}{a} - 3\Big) \subset \mathbf{C}^2.
$$

ここで, $a \in (0,1)$,

$$
A, B = \sqrt{\frac{3 - 2a \pm 2\sqrt{(a-1)(a-2)}}{a}}.
$$

定理 4.7 ([1]). $f : M^3 \to N^5(\epsilon)$ を佐々木空間形の proper 重調和反不変部分多様体とする. このとき $\epsilon \geq \dfrac{-11 + 32\sqrt{2}}{41}$, $f(M^3)$ は次の一部である.

$$
S^1\Bigg(\sqrt{\frac{\mu^2}{\mu^2+1}}\Bigg) \times S^1\Bigg(\sqrt{\frac{1}{2(\mu^2+1)}}\Bigg) \times S^1\Bigg(\sqrt{\frac{1}{2(\mu^2+1)}}\Bigg) \subset S^5(\epsilon) \subset \mathbf{C}^3.
$$

ここで

$$
\mu^2 = \begin{cases}
1 & (\epsilon = 1),\\
\dfrac{5 + 7\epsilon \pm \sqrt{41\epsilon^2 + 22\epsilon - 47}}{4(3+\epsilon)} & (\epsilon \neq 1).
\end{cases}
$$

系 4.2. $S^5(1)$ の 3 次元 proper 重調和反不変部分多様体は次の一部である.

$$
S^1\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \times S^1\Big(\frac{1}{2}\Big) \times S^1\Big(\frac{1}{2}\Big) \subset S^1\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \times S^3\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \subset S^5(1).
$$

上の形からわかるように, 系 4.2 の proper 重調和部分多様体は, 定理 3.8 の等号をみたすものである.

5 複素空間形の重調和部分多様体

$(\tilde{M}^n(4\epsilon), J)$ を正則断面曲率 4ϵ の複素 n 次元複素空間形, ただし $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}$, とする. つまり, $\tilde{M}^n(4) = CP^n(4)$, $\tilde{M}^n(0) = \mathbf{C}^n$, $\tilde{M}^n(4) = CH^n(-4)$.

ケーラー多様体の部分多様体の中で特に重要なものとしてラグランジュ部分多様体がある. 定義は以下の通り.

定義 5.1. M^n が $(\tilde{M}^n(4\epsilon), J)$ のラグランジュ部分多様体 $\underset{def}{\Longleftrightarrow} \langle X, JY \rangle = 0, \quad X, Y \in TM.$

命題 5.1 ([17])**.** M^n を $\tilde{M}^n(4\epsilon)$ のラグランジュ部分多様体とする. このとき, M^m が重調和部分多様体 $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \Delta^{\perp} H + \operatorname{trace} h(\cdot, A_H \cdot) - \epsilon(n+3)H = 0, \\ 4\operatorname{trace} A_{\nabla^{\perp}_{(\cdot)}H}(\cdot) + n\operatorname{grad}|H|^2 = 0. \end{cases}$$

定理 5.1 ([25])**.** $f : M^2 \to \tilde{M}^2(4\epsilon)$, $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}$ を CMC proper 重調和ラグランジュ曲面とする. このとき $\epsilon = 1$ で, $f(M^2)$ は次の式で表される.

$$f(x, y_1, y_2) = \pi\left(\sqrt{\frac{\mu^2}{\mu^2+1}}e^{-\frac{i}{\mu}x}, \sqrt{\frac{1}{\mu^2+1}}e^{i\mu x}y_1, \sqrt{\frac{1}{\mu^2+1}}e^{i\mu x}y_2\right),$$

ここで π は Hopf fibration, $\mu^2 = \dfrac{7 \pm \sqrt{41}}{4}$, $y_1^2 + y_2^2 = 1$.

注意 5.1. 定理 5.1 の $z(x) := \left(\sqrt{\dfrac{\mu^2}{\mu^2+1}}e^{-\frac{i}{\mu}x}, \sqrt{\dfrac{1}{\mu^2+1}}e^{i\mu x}\right)$ は $S^3(1)$ の (測地線でない) ルジャンドル曲線である. この $z(x)$ は閉曲線ではない.

複素空間形の全臍的ラグランジュ部分多様体は全測地的である. 複素空間形のラグランジュ部分多様体の形作用素 A は $A_{JX}Y = A_{JY}X$ $(X, Y \in TM^n)$ をみたすことに注意すれば, 次の条件は全測地的の次にシンプルな条件といえる (定義 4.2 を参照).

定義 5.2 ([11])**.** M^n が複素空間形の *H-umbilical* ラグランジュ部分多様体 $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $H \neq 0$ かつ、形作用素が以下をみたす.

(1) $A_{H/|H|}JH = \lambda JH, \quad \lambda$ は関数,

(2) $A_{H/|H|}$ は $D(p) = \{X \in T_pM^n | \langle X, JH \rangle = 0\}$ 上でただ一つの固有値 $\mu(p)$ をもつ,

(3) $\langle A_{JX}Y, Z \rangle = 0, \quad X, Y, Z \in D(p)$.

もし, $r \in \mathbf{R}$ に対して $\lambda = r\mu$ が成り立つとき, M^n を比が r の H-umbilical ラグランジュ部分多様体とよぶ.

定理 5.1 の重調和ラグランジュ曲面は H-umbilical である. 一般次元複素空間形の CMC proper 重調和 H-umbilical ラグランジュ部分多様体は次のように決定されている.

定理 5.2 ([27])**.** $f : M^n \to \tilde{M}^n(4\epsilon)$ を CMC proper 重調和 H-umbilical ラグランジュ部分多様体とする. ただし $n \geq 3$, $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}$. このとき, $\epsilon = 1$ で f は次の式で表される.

$$\pi\left(\sqrt{\frac{\mu^2}{\mu^2+1}}e^{-\frac{i}{\mu}x}, \sqrt{\frac{1}{\mu^2+1}}e^{i\mu x}y_1, \ldots, \sqrt{\frac{1}{\mu^2+1}}e^{i\mu x}y_n\right) \subset CP^n(4).$$

ここで $\mu^2 = \dfrac{n+5 \pm \sqrt{n^2+6n+25}}{2n}$, $y_1^2 + \ldots + y_n^2 = 1$.

注意 5.2. 定理 5.2 の $z(x) := \left(\sqrt{\dfrac{\mu^2}{\mu^2+1}}e^{-\frac{i}{\mu}x}, \sqrt{\dfrac{1}{\mu^2+1}}e^{i\mu x}\right)$ は $S^3(1)$ の (測地線でない) ルジャンドル曲線である．この $z(x)$ は, どんな $n \in \mathbf{Z}$ に対しても閉曲線にはならない．

6 不定値計量の場合

6.1 不定値計量をもつ実空間形内の場合

$\mathbf{R}^n_s$ を計量 $g = -\sum_{i=1}^s dx_i^2 + \sum_{j=s+1}^n dx_j^2$ をもつ擬ユークリッド空間とする．次のようにおく．

$S^n_s(c) = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}_s | -\sum_{i=1}^s x_i^2 + \sum_{j=s+1}^{n+1} x_j^2 = 1/c > 0\}$,
$H^n_s(c) = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}_{s+1} | -\sum_{i=1}^{s+1} x_i^2 + \sum_{j=s+2}^{n+1} x_j^2 = 1/c < 0\}$.

定理 6.1 ([13])**.** $\mathbf{R}^3_1$ の非退化重調和曲面は極小曲面 $(H = 0)$ である．

外空間が非平坦の場合は, 正定値の場合の類似物とそうでないものが得られる．

定理 6.2 ([28])**.** $M^3_1(c)$, $c \in \{-1, 1\}$ の非退化 proper 重調和曲面は以下のいずれかの一部．
(1) $S^2_1(2) \subset S^3_1(1)$,
(2) $H^2(-2) \subset H^3_1(-1)$,
(3) ガウス曲率 2 の B-scroll $\subset S^3_1(1)$.

ここで, B-scroll は次で定義される曲面である．

定義 6.1.

$$x(s,u) = \gamma(s) + uB(s) \subset M^3_1(c) \subset \mathbf{R}^4_s,$$

ここで $\gamma(s)$ は $M^3_1(c)$, $c \in \{-1, 0, 1\}$ のヌル曲線、つまり $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 0$, $\gamma' \neq 0$.
$\{A, B, C\}$: $\gamma(s)$ に沿うフレーム s.t.

$$\begin{aligned}
&\langle A, A \rangle = \langle B, B \rangle = 0, \quad \langle A, B \rangle = 1, \\
&\gamma'(s) = A(s), \\
&A'(s) = k(s)C(s), \\
&B'(s) = -c\gamma + \lambda(s)C(s), \\
&C'(s) = -\lambda(s)A(s) - k(s)B(s),
\end{aligned}$$

ここで, $C = A \times B$ (ここで $\times$ は TM^3_1 上のベクトル積), $k(s) \neq 0$.

6.2 不定値計量をもつ複素空間形内の場合

$\mathbf{C}^n_s$ を計量 $g_{n,s}(z, w) = \mathrm{Re}(-\sum_{j=1}^s z_j \bar{w}_j + \sum_{i=s+1}^n z_i \bar{w}_i)$ をもつ複素擬ユークリッド空間とする．$S^{2n+1}_{2s}(1) = \{z \in \mathbf{C}^{n+1}_s : g_{n+1,s}(z, z) = 1\}$ とおく．

$\tilde{M}^2_1(4\epsilon)$ を計量の符号が $(-, -, +, +)$ の正則断面曲率 4ϵ をもつ複素 2 次元複素空間形, ただし $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}$, とする．つまり $\tilde{M}^2_1(0) = \mathbf{C}^2_1$, $\tilde{M}^2_1(4) = CP^2_1(4)$, $\tilde{M}^2_1(-4) = CH^2_1(-4)$ ([7]).

次の結果は, 正定値の場合と類似である．

定理 6.3 ([25])**.** $CP^2_1(4)$ の CMC proper 重調和ラグランジュ曲面は次のように表される.

$$f(x,y_1,y_2)=\pi\left(\sqrt{\frac{1}{\mu^2+1}}e^{i\mu x}y_1,\sqrt{\frac{1}{\mu^2+1}}e^{i\mu x}y_2,\sqrt{\frac{\mu^2}{\mu^2+1}}e^{-\frac{i}{\mu}x}\right).$$

ここで, $\pi:S^5_2(1)\to CP^2_1(4)$ は Hopf fibration, $\mu^2=\dfrac{7\pm\sqrt{41}}{4}$, $-y_1^2+y_2^2=1$.

定理 6.3 で $CP^2_1(4)$ の計量の符号を取り換えれば, 定理 6.3 の f は $CH^2_1(-4)$ の CMC proper 重調和ラグランジュ曲面となる.

外空間の計量が不定値のとき, 次のような特殊な部分多様体が存在する.

定義 6.2. 擬リーマン多様体の非退化部分多様体が *marginally trapped* (または *quasi-minimal*) $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\langle H,H\rangle=0$ かつ $H\neq 0$.

次に示すように, marginally trapped 重調和ラグランジュ曲面を許容する複素空間形は $\mathbf{C}^2_1$ のみである.

定理 6.4 ([30])**.** $f:M\to\tilde{M}^2_1(4\epsilon)$ を marginally trapped 重調和ラグランジュ曲面とする. このとき $\epsilon=0$ で M は以下のように表される.

$$f(x,y)=c_1xe^{if(y)}+w(y)\subset\mathbf{C}^2_1,$$

ここで c_1 は光的ベクトル (つまり $\langle c_1,c_1\rangle=0$), $f(y)$ は $f'(y)\neq 0$ をみたす実関数, $w(y)$ は $\mathbf{C}^2_1$ の曲線 s.t.

$$\begin{aligned}&\langle w',w'\rangle=0,\\&\left\langle iw',c_1e^{if(y)}\right\rangle=0,\\&\left\langle w',c_1e^{if(y)}\right\rangle=-1.\end{aligned}$$

6.3 Quasi-biharmonic 部分多様体

外空間の計量が不定値の場合は, 重調和部分多様体の一つの拡張として次が定義できる.

定義 6.3 ([30])**.** 擬リーマン部分多様体が *quasi-biharmonic* $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\langle\tau_2(f),\tau_2(f)\rangle=0$ かつ $\tau_2(f)\neq 0$. ここで f は等長はめこみ.

Marginally trapped 重調和ラグランジュ曲面と異なり, marginally trapped quasi-biharmonic ラグランジュ曲面は, $\mathbf{C}^2_1$ 以外の複素空間形にも存在する.

定理 6.5 ([30])**.** $\mathbf{C}^2_1$ の marginally trapped quasi-biharmonic ラグランジュ曲面は以下のように表される.

$$f(x,y)=z(x)e^{iy},$$

ここで $z(x)$ は $\mathbf{C}^2_1$ の曲線 s.t.

$$\begin{aligned}&\langle z,z\rangle=0,\\&\langle z',z'\rangle=0,\\&\langle z,iz'\rangle=1,\quad z''\neq 0.\end{aligned}$$

定理 6.6 ([30])**.** M を $\tilde{M}_1^2(4\epsilon)$ の marginally trapped ラグランジュ曲面とする．このとき, M が quasi-biharmonic $\Longleftrightarrow$ M の Gauss 曲率 $G=\epsilon$.

Chen と Dillen は $CP_1^2(4)$ の $G=1$ の marginally trapped ラグランジュ曲面を分類した ([12, Theorem 5.1]). しかし, その分類には極小曲面が含まれていた. 彼らの分類を修正することにより, 定理 6.6 から次が得られる.

定理 6.7 ([30])**.** $CP_1^2(4)$ の quasi-biharmonic marginally trapped ラグランジュ曲面は以下のように表される.

$$L(x,y)=\pi\bigg(\Big(\frac{2}{x+y}+\sqrt{2}if(y)\Big)z(y)-z'(y)\bigg).$$

ここで $f(y)\neq 0$ は実関数, $z(y)$ は $\mathbf{C}_1^3$ の曲線 s.t.

$$\begin{aligned}&\langle z,z\rangle=0,\quad \langle z',z'\rangle=1,\quad \langle iz,z'\rangle=0,\quad \langle z'',z''\rangle=6f^2,\\ &z'''=2\sqrt{2}ifz''+2(f^2+\sqrt{2}if')z'+(\sqrt{2}i(f''+2g)+2ff')z,\end{aligned}$$

ここで $g(y)$ は実関数である.

例 6.1. $f(y)=a=\text{const.}$, $g(y)=0$ と選べば, 定理 6.7 のラグランジュ曲面は次のように与えられる.

$$L(x,y)=\pi\bigg(\frac{1}{a(x+y)}\Big(e^{i\sqrt{2}ay}(\sqrt{2}+ia(x-y)),e^{i\sqrt{2}ay}a(x-y),\sqrt{2}+ia(x+y)\Big)\bigg).$$

定理 6.7 で $CP_1^2(4)$ の計量の符号を取り換えれば, 定理 6.7 の L は $CH_1^2(-4)$ の quasi-biharmonic marginally trapped ラグランジュ曲面となる.

7 Tangentially biharmonic 部分多様体

重調和部分多様体の一つの拡張として次が定義できる.

定義 7.1 ([29])**.** 部分多様体 $f(M)$ が *tangentially biharmonic* $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\tau_2(f)$ の接方向が各点で消えている.

Tangentially biharmonicity と同値な条件が以下のようにして得られる ([22]).

G を M 上の計量の集合とする．与えられた写像 $f:(M,g)\to(N,h)$ に対して次の汎関数を考える.

$$F: G\longrightarrow \mathbf{R},\qquad F(g)=E_2(f)=\frac{1}{2}\int_M|\tau(f)|^2dv_g.$$

F に対するオイラー・ラグランジュ方程式は次で与えられる.

$$S_2(X,Y):=\frac{1}{2}|\tau(f)|^2\langle X,Y\rangle+\langle df,\nabla\tau(f)\rangle\langle X,Y\rangle-\langle df(X),\nabla_Y\tau(f)\rangle-\langle df(Y),\nabla_X\tau(f)\rangle=0.$$

テンソル S_2 の発散は以下をみたす.

$$(\mathrm{div}S_2)(Y):=\sum(\nabla_{e_i}S_2)(e_i,Y)=-\langle\tau_2(f),df(Y)\rangle.$$

よって, tangentially biharmonic $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{div}S_2=0$ が成り立つ. Caddeo らはこの条件を biconservative とよんでいる ([9]).

7.1 Tangentially biharmonic ラグランジュ部分多様体

$\mathbf{R}^3$ の曲面 M^2 の法束 $T^\perp M^2=\{(x,V_x)\in\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3|x\in M^2, V_x\in T_x^\perp M^2\}$ は, $\mathbf{C}^3=\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$ のラグランジュ部分多様体である. ここで $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$ 上の複素構造 J は $J(X,Y)=(-Y,X)$ と定める. これらの部分多様体に対して, 次が成り立つ.

定理 7.1 ([29])**.** $\mathbf{R}^3$ の曲面 M^2 の法束が $\mathbf{C}^3$ の tangentially biharmonic ラグランジュ部分多様体 $\Longleftrightarrow$ M^2 は極小曲面か, 球面または円柱の一部.

2 次元球面の法束は $\mathbf{C}^3$ の H-umbilical ラグランジュ部分多様体であることに注意すれば, 一般の複素空間形内の tangentially biharmonic H-umbilical ラグランジュ部分多様体の分類問題が提起される. 以下はそれらの局所的な分類である.

定理 7.2 ([32])**.** $CP^n(4)$ の tangentially biharmonic H-umbilical ラグランジュ部分多様体は局所的に以下のいずれかに合同である.

(1)

$$f(s,y_1,\dots,y_n)=\pi(z_1(s),z_2(s)y_1,\dots,z_2(s)y_n),\quad y_1^2+\cdots+y_n^2=1.$$

ここで, π は Hopf fibration, $z=(z_1,z_2)$ は $S^3(1)\subset\mathbf{C}^2$ のルジャンドル曲線で次の式で表される.

$$z(s)=\left(\frac{i\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}e^{-\frac{i}{\mu}s},\frac{1}{\sqrt{\mu^2+1}}e^{i\mu s}\right),\quad \mu\in\mathbf{R}-\{0\}.$$

この場合, 比が $r=1-\mu^{-2}$ の H-umbilical ラグランジュ部分多様体である.

(2)

$$f(s,y_1,\dots,y_n)=\pi(z_1(s),z_2(s)y_1,\dots,z_2(s)y_n),\quad y_1^2+\cdots+y_n^2=1.$$

ここで, $z=(z_1,z_2)$ は $S^3(1)\subset\mathbf{C}^2$ のルジャンドル曲線で次の式で表される.

$$\begin{aligned}z_1(s)&=-\frac{2i\mu^2+\mu'}{\sqrt{c}\mu^{\frac{3}{2}}}\exp\left(\int_0^s -i\mu ds\right),\\ z_2(s)&=-\frac{2}{\sqrt{c\mu}}\exp\left(\int_0^s i\mu ds\right).\end{aligned}$$

ここで c は正の定数, $\mu=\mu(s)$ は次の非定数解 :

$$\mu'^2=-4\mu^2(\mu^2+1)+c\mu^3.$$

この場合, $r=0$.

(3)

$$f(s,y_1,\dots,y_n)=\pi(z_1(s),z_2(s)y_1,\dots,z_2(s)y_n),\quad y_1^2+\cdots+y_n^2=1.$$

ここで, $n\neq 7$, $z=(z_1,z_2)$ は $S^3(1)\subset\mathbf{C}^2$ のルジャンドル曲線で次の式で表される.

$$\begin{aligned}z_1(s)&=\frac{i(1-n)\mu^2-3\mu'}{3\sqrt{c}\mu^{\frac{n+2}{n-1}}}\exp\left(\int_0^s i\frac{4-n}{3}\mu ds\right),\\ z_2(s)&=\frac{(1-n)}{3\sqrt{c}\mu^{\frac{3}{n-1}}}\exp\left(\int_0^s i\mu ds\right).\end{aligned}$$

ここで c は正の定数, $\mu=\mu(s)$ は次の非定数解.

$$\mu'^2=-\frac{(1-n)^2}{9}\mu^2(\mu^2+1)+c\mu^{\frac{2(n+2)}{n-1}}.$$

この場合, $r=(7-n)/3$.

(4)

$$f(s,y_1,\dots,y_n)=\pi(z_1(s),z_2(s)y_1,\dots,z_2(s)y_n),\quad y_1^2+\cdots+y_n^2=1.$$

ここで, $z=(z_1,z_2)$ は $S^3(1)\subset \mathbf{C}^2$ のルジャンドル曲線で次の式で表される.

$$z_1=\frac{i\mu-k}{\sqrt{\mu^2+k^2+1}}\exp\biggl(\int_0^s(i\lambda-i\mu)ds\biggr),$$
$$z_2=\frac{1}{\sqrt{\mu^2+k^2+1}}\exp\biggl(\int_0^s i\mu ds\biggr).$$

ここで $k(s)=\mu'(s)/(\lambda(s)-2\mu(s))$, $\lambda\neq r\mu$ $(r\in\mathbf{R})$, さらに $\lambda=\lambda(s)$ と $\mu=\mu(s)$ は次の非定数解.

$$\begin{cases}\mu''(\lambda-2\mu)-\mu'(\lambda'-3\mu')+(\lambda-2\mu)^2(-\mu^2+\lambda\mu+1)=0,\\ (3\lambda+(n-1)\mu)(\lambda-2\mu)\lambda'+(n-1)\lambda(3\lambda+(n-5)\mu)\mu'=0.\end{cases}$$

$F(s)\subset\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ を弧長パラメータで表示された曲線とする. $\kappa(s)$ を $F(s)$ の曲率, $\theta(s)$ を $F(s)$ の偏角とする. $\mathbf{C}^n$ の tangentially biharmonic H-umbilical ラグランジュ部分多様体は, 次のように $\mathbf{C}$ の曲線で記述される.

定理 7.3 ([32]). $\mathbf{C}^n$ の tangentially biharmonic H-umbilical ラグランジュ部分多様体は局所的に以下のいずれかに合同である.

(1) $(a\exp(is/a),u_2,\dots,u_n),\quad a>0$.

(2) $S^1(a)\otimes\iota$. この場合, $r=0$.

(3) $F\otimes\iota$, ここで F は原点を通らない直線. この場合, $r=1$.

(4) $F\otimes\iota$, ここで $F(s)$ は次をみたす:

$$\kappa(s)=\frac{7-n}{3}\theta'(s).$$

ただし, $\kappa'(s)\neq 0,\quad \theta'(s)\neq 0,\quad n\neq 7$. この場合, $r=(7-n)/3$.

(5) $F\otimes\iota$, ここで F は次をみたす:

$$\kappa'(3\kappa+(n-1)\theta')+(n-1)(\ln|F|)'\kappa(3\kappa+(n-5)\theta')=0.$$

ただし, $\kappa'(s)\neq 0,\quad \theta'(s)\neq 0,\quad (\kappa/\theta')'(s)\neq 0$.

注意 7.1. 半径 a の球面 $S^n(a)$ の法束は, $(a+is)\otimes\iota$ で表される.

注意 7.2. $F(s)\subset\mathbb{C}^*$ に対して $\alpha(s)=|F(s)|^2$ とおく. このとき,

(1) $4\alpha-(\alpha')^2=0$ となる点では, $F\otimes\iota$ の第二基本形式は消える.

(2) 全ての点で $4\alpha-(\alpha')^2\neq 0$ となる $F(s)$ は, 原点を通る直線の一部である.

(3) 全ての点で $4\alpha-(\alpha')^2\neq 0$ となる曲線は次のように表せる.

$$F(s)=\sqrt{\alpha}\exp\Big(i\int\frac{\sqrt{4\alpha-(\alpha')^2}}{2\alpha}ds\Big).$$

この曲線の曲率と偏角は次で与えられる。

$$\kappa(s)=\frac{2-\alpha''}{\sqrt{4\alpha-(\alpha')^2}},\qquad \theta(s)=\int\frac{\sqrt{4\alpha-(\alpha')^2}}{2\alpha}ds.$$

よって,

$$\kappa=r\theta'\iff 2\alpha\alpha''-r(\alpha')^2+4(r-1)\alpha=0.$$

注意 7.3. 定理 7.3 (5) の微分方程式は, $\alpha(s)$ に関する 3 階の常微分方程式に書き直すことができる.

$H^3_1(-1)$ は擬リーマン計量を持つ佐々木空間形である ([33]). $H^3_1(-1)$ のルジャンドル曲線は, $S^3(1)$ の場合と同様に定義される. $CP^n(4)$ の tangentially biharmonic H-umbilical ラグランジュ部分多様体は全て $S^3(1)$ のルジャンドル曲線で記述された. 一方, $CH^n(-4)$ の tangentially biharmonic H-umbilical ラグランジュ部分多様体は, 以下のように, $H^3_1(-1)$ のルジャンドル曲線で記述できるものと, そうでないものがある.

定理 7.4 ([32])**.** $CH^n(-4)$ の tangentially biharmonic H-umbilical ラグランジュ部分多様体は局所的に以下のいずれかに合同である.

(1)

$$f(s,u_2,\dots,u_n)=\pi\left(\frac{e^{is}}{2}\left(1-is+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}u_j^2,s+\frac{i}{2}\sum_{j=2}^{n}u_j^2,u_2,\dots,n_n\right)\right).$$

この場合, $r=2$.

(2)

$$f(s,y_1,\dots,y_n)=\pi(z_1(s),z_2(s)y_1,\dots,z_2(s)y_n),\quad y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1,$$

ここで, π は Hopf fibration, $z=(z_1,z_2)$ は $H^3_1(-1)\subset\mathbf{C}^2_1$ のルジャンドル曲線で次の式で表される.

$$z(s)=\left(\frac{i\mu}{\sqrt{\mu^2-1}}e^{\frac{i}{\mu}s},\frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}}e^{i\mu s}\right),\quad \mu^2-1>0,\quad \mu\in\mathbf{R}-\{0\}.$$

この場合, $r=1+u^{-2}$.

(3)

$$f(s,y_1,\dots,y_n)=\pi(z_1(s),z_2(s)y_1,\dots,z_2(s)y_n),\quad y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1.$$

ここで, $z=(z_1,z_2)$ は $H^3_1(-1)\subset\mathbf{C}^2_1$ のルジャンドル曲線で次の式で表される.

$$z_1(s)=-\frac{2i\mu^2+\mu'}{\sqrt{c}\mu^{\frac{3}{2}}}\exp\Big(\int_0^s-i\mu ds\Big),$$
$$z_2(s)=-\frac{2}{\sqrt{c\mu}}\exp\Big(\int_0^s i\mu ds\Big).$$

ここで c は正の定数, $\mu=\mu(s)$ は次の非定数解.

$$\mu'^2=-4\mu^2(\mu^2-1)+c\mu^3.$$

この場合, $r=0$.

(4)

$$f(s,y_1,\dots,y_n)=\pi(z_1(s),z_2(s)y_1,\dots,z_2(s)y_n),\quad y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1.$$

ここで, $n\neq 7$, $z=(z_1,z_2)$ は $H_1^3(-1)\subset \mathbf{C}_1^2$ のルジャンドル曲線で次の式で表される.

$$\begin{aligned}
z_1(s)&=\frac{i(1-n)\mu^2-3\mu'}{3\sqrt{c}\mu^{\frac{n+2}{n-1}}}\exp\biggl(\int_0^s i\frac{4-n}{3}\mu ds\biggr),\\
z_2(s)&=\frac{(1-n)}{3\sqrt{c}\mu^{\frac{3}{n-1}}}\exp\biggl(\int_0^s i\mu ds\biggr).
\end{aligned}$$

ここで c は正の定数, $\mu=\mu(s)$ は次の非定数解.

$$\mu'^2=-\frac{(1-n)^2}{9}\mu^2(\mu^2-1)+c\mu^{\frac{2(n+2)}{n-1}}.$$

この場合, $r=(7-n)/3$.

(5)

$$f(s,y_1,\dots,y_n)=\pi(z_1(s),z_2(s)y_1,\dots,z_2(s)y_n),\quad y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1.$$

ここで, $z=(z_1,z_2)$ は $H_1^3(-1)\subset \mathbf{C}_1^2$ のルジャンドル曲線で次の式で表される.

$$\begin{aligned}
z_1&=\frac{i\mu-k}{\sqrt{\mu^2+k^2-1}}\exp\biggl(\int_0^s (i\lambda-i\mu)ds\biggr),\\
z_2&=\frac{1}{\sqrt{\mu^2+k^2-1}}\exp\biggl(\int_0^s i\mu ds\biggr).
\end{aligned}$$

ここで $k(s)=\mu'(s)/(\lambda(s)-2\mu(s))$, $\lambda\neq r\mu$ $(r\in\mathbf{R})$, さらに $\lambda=\lambda(s)$ と $\mu=\mu(s)$ は次の非定数解.

$$\begin{cases}\mu''(\lambda-2\mu)-\mu'(\lambda'-3\mu')+(\lambda-2\mu)^2(-\mu^2+\lambda\mu-1)=0,\\ (3\lambda+(n-1)\mu)(\lambda-2\mu)\lambda'+(n-1)\lambda(3\lambda+(n-5)\mu)\mu'=0.\end{cases}$$

(6)

$$f(s,y_1,\dots,y_n)=\pi(z_1(s)y_1,\dots,z_1(s)y_n,z_2(s)),\quad y_1^2-y_2^2-\cdots-y_n^2=1.$$

ここで, $z=(z_1,z_2)$ は $H_1^3(-1)\subset \mathbf{C}_1^2$ のルジャンドル曲線で次の式で表される.

$$z(s)=\biggl(\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}e^{i\mu s},\frac{i\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}e^{\frac{i}{\mu}s}\biggr),\quad 1-\mu^2>0,\quad \mu\in\mathbf{R}-\{0\}.$$

この場合, $r=1+\mu^{-2}$.

(7)

$$f(s,y_1,\dots,y_n)=\pi(z_1(s)y_1,\dots,z_1(s)y_n,z_2(s)),\quad y_1^2-y_2^2-\cdots-y_n^2=1.$$

ここで, $z=(z_1,z_2)$ は $H_1^3(-1)\subset \mathbf{C}_1^2$ のルジャンドル曲線で次の式で表される.

$$\begin{aligned} z_1(s)&=-\frac{2}{\sqrt{-c\mu}}\exp\biggl(\int_0^s i\mu ds\biggr),\\ z_2(s)&=-\frac{2i\mu^2+\mu'}{\sqrt{-c}\mu^{\frac{3}{2}}}\exp\biggl(\int_0^s -i\mu ds\biggr).\end{aligned}$$

ここで c は負の定数, $\mu=\mu(s)$ は次の非定数解.

$$\mu'^2=-4\mu^2(\mu^2-1)+c\mu^3.$$

(8)

$$f(s,y_1,\dots,y_n)=\pi(z_1(s)y_1,\dots,z_1(s)y_n,z_2(s)),\quad y_1^2-y_2^2-\cdots-y_n^2=1.$$

ここで, $n\neq 7$, $z=(z_1,z_2)$ は $H_1^3(-1)\subset \mathbf{C}_1^2$ のルジャンドル曲線で次の式で表される.

$$\begin{aligned} z_2(s)&=\frac{(1-n)}{3\sqrt{-c}\mu^{\frac{3}{n-1}}}\exp\biggl(\int_0^s i\mu ds\biggr),\\ z_1(s)&=\frac{i(1-n)\mu^2-3\mu'}{3\sqrt{-c}\mu^{\frac{n+2}{n-1}}}\exp\biggl(\int_0^s i\frac{4-n}{3}\mu ds\biggr).\end{aligned}$$

ここで c は負の定数, $\mu=\mu(s)$ は次の非定数解.

$$\mu'^2=-\frac{(1-n)^2}{9}\mu^2(\mu^2-1)+c\mu^{\frac{2(n+2)}{n-1}}.$$

この場合, $r=(7-n)/3$.

(9)

$$f(s,y_1,\dots,y_n)=\pi(z_1(s)y_1,\dots,z_1(s)y_n,z_2(s)),\quad y_1^2-y_2^2-\cdots-y_n^2=1.$$

ここで $z=(z_1,z_2)$ は $H_1^3(-1)\subset \mathbf{C}_1^2$ のルジャンドル曲線で次の式で表される.

$$\begin{aligned} z_1&=\frac{i\mu-k}{\sqrt{1-\mu^2-k^2}}\exp\biggl(\int_0^s (i\lambda-i\mu)ds\biggr),\\ z_2&=\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2-k^2}}\exp\biggl(\int_0^s i\mu ds\biggr).\end{aligned}$$

ここで, $k(s)=\mu'(s)/(\lambda(s)-2\mu(s))$, $1-\mu^2-k^2>0$, $\lambda\neq r\mu$ $(r\in\mathbf{R})$, さらに $\lambda=\lambda(s)$ と $\mu=\mu(s)$ は次の非定数解.

$$\begin{cases}\mu''(\lambda-2\mu)-\mu'(\lambda'-3\mu')+(\lambda-2\mu)^2(-\mu^2+\lambda\mu-1)=0,\\ (3\lambda+(n-1)\mu)(\lambda-2\mu)\lambda'+(n-1)\lambda(3\lambda+(n-5)\mu)\mu'=0.\end{cases}$$

(10) $f=\pi\circ\psi$,

$$\psi(s,u_2,\dots,u_n)=\frac{\sqrt{\cosh 2s}\exp[i\tan^{-1}(\tanh s)]}{2}\Big(1+\sum_{j=2}^{n}u_j^2+\operatorname{sech}2s-i\tanh 2s,$$
$$i\sum_{j=2}^{n}u_j^2+i\operatorname{sech}2s-i+\tanh 2s,u_2,\dots,u_n\Big).$$

この場合, $r=0$.

(11) $n\neq 7$, $f=\pi\circ\psi$,

$$\psi(s,u_2,\dots,u_n)=\cosh^{\frac{3}{n-1}}\Big(\frac{n-1}{3}s\Big)\exp\Big[\frac{6i}{n-1}\tan^{-1}\Big(\tanh\Big(\frac{n-1}{6}s\Big)\Big)\Big]$$
$$\times\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}u_j^2+\frac{1}{2}\operatorname{sech}^{\frac{6}{n-1}}\Big(\frac{n-1}{3}s\Big)-i\int_0^s\operatorname{sech}^{\frac{n+5}{n-1}}\Big(\frac{n-1}{3}x\Big)dx,$$
$$\frac{i}{2}\sum_{j=2}^{n}u_j^2+\frac{i}{2}\operatorname{sech}^{\frac{6}{n-1}}\Big(\frac{n-1}{3}s\Big)-\frac{i}{2}+\int_0^s\cosh^{\frac{n+5}{n-1}}\Big(\frac{n-1}{3}x\Big)dx,u_2,\dots,u_n\Big).$$

この場合, $r=(7-n)/3$.

(12) $f=\pi\circ\psi$,

$$\psi(s,u_2,\dots,u_n)=\exp\Big[\int_0^s(k+i\mu)dt\Big]\Big(1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}u_j^2-\int_0^s(k+i\mu)\exp\Big(-\int_0^s 2kds\Big)ds,$$
$$[-k(0)+i\mu(0)]\Big[\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}u_j^2-\int_0^s(k+i\mu)\exp\Big(-\int_0^s 2kds\Big)ds\Big],u_2,\dots,u_n\Big).$$

ここで, $k(s)=\mu'(s)/(\lambda(s)-2\mu(s))$, $\lambda\neq r\mu$ $(r\in\mathbf{R})$, さらに $\lambda=\lambda(s)$ と $\mu=\mu(s)$ は次の非定数解.

$$\begin{cases}\mu'^2=(\lambda-2\mu)^2(1-\mu^2),\\ (3\lambda+(n-1)\mu)(\lambda-2\mu)\lambda'+(n-1)\lambda(3\lambda+(n-5)\mu)\mu'=0.\end{cases}$$

参考文献

[1] K. Arslan, R. Ezentas, C. Murathan and T. Sasahara, *Biharmonic anti-invariant submanifolds in Sasakian space forms*, Beiträge Algebra Geom. **48** (2007), 191–207.

[2] C. Baikoussis, D.E. Blair and T. Koufogiorgos, *Integral submanifolds of Sasakian space forms* $\bar{M}^7$, Results Math. **27** (1995), 207–226.

[3] A. Balmuş, S. Montaldo and C. Oniciuc, *Classification results for biharmonic submanifolds in spheres*, Israel J. Math. **168** (2008), 201–220.

[4] A. Balmuş, S. Montaldo and C. Oniciuc, *Biharmonic hypersurfaces in 4-dimensional space forms*, Math. Nachr. **283** (2010), 1696–1705.

[5] A. Balmuş, S. Montaldo and C. Oniciuc, *Biharmonic PNMC submanifolds in spheres*, Ark. Mat. **51** (2013), 197–221.

[6] A. Balmuş and C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds with parallel mean curvature vector field in spheres*, J. Math. Anal. Appl. **386** (2012), 619–630.

[7] M. Barros and A. Romero, *Indefinite Kaehler manifolds,* Math. Ann. **261** (1982), 55-62.

[8] R. Caddeo, S. Montaldo and C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds of* S^3, Internat. J. Math. **12** (2001), 867–876.

[9] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc and P. Piu, *Surfaces in three-dimensional space forms with divergence-free stress-energy tensor*, Ann. Mat. Pura Appl. **193** (2014), 529–550.

[10] B.-Y. Chen, *Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*, Soochow J. Math. **17** (1991), no. 2, 169–188.

[11] B.-Y. Chen, *Interaction of Legendre curves and Lagrangian submanifolds*, Israel J. Math. **99** (1997), 69–108.

[12] B.-Y. Chen and F. Dillen, *Classification of marginally trapped Lagrangian surfaces in Lorentzian complex space forms*, J. Math. Phys. **48** (2007), 013509, 23 pp; Erratum, J. Math. Phys. **49** (2008), 059901.

[13] B.-Y. Chen and S. Ishikawa, *Biharmonic surfaces in pseudo-Euclidean spaces*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. A **45** (1991), 323–347.

[14] J. Eells and L. Lemaire, *Selected Topics in Harmonic Maps*, CBMS, Regional Conference Series in Math., Amer. Math. Soc. **50**, 1983.

[15] D. Fetcu and C. Oniciuc, *Explicit formulas for biharmonic submanifolds in non-Euclidean 3-spheres*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **77** (2007), 179–190.

[16] D. Fetcu and C. Oniciuc, *Biharmonic integral* C*-parallel submanifolds in* 7*-dimensional Sasakian space forms*, Tohoku Math. J. **64** (2012), 195–222.

[17] D. Fetcu, E. Loubeau, S. Montaldo and C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds in* $\mathbb{C}P^n$, Math. Z. **266** (2010), 505–531.

[18] C. Oniciuc, *Tangency and Harmonicity Properties*, PhD Thesis, Geometry Balkan Press 2003, `http://www.mathem.pub.ro/dgds/mono/dgdsmono.htm`

[19] C. Oniciuc, *Biharmonic maps between Riemannian manifolds*, An. Stiint. Univ. Al.I. Cuza Iasi Mat (N.S.) **48** (2002), 237–248.

[20] G. Y. Jiang, 2*-harmonic maps and their first and second variational formulas* (Chinese), Chinese Ann. Math. A **7** (1986), 389–402; Note di Mat. **28** (2009), 209–232.

[21] H. Li and X. Wang, *Isotropic Lagrangian submanifolds in complex Euclidean space and complex hyperbolic space*, Results Math. **56** (2009), 387–403.

[22] E. Loubeau, S. Montaldo and C. Oniciuc, *The stress energy tensor for biharmonic maps*, Math. Z. **259** (2008), 503–524.

[23] Y.-L. Ou and L. Tang, *On the generalized Chen's conjecture on biharmonic submanifolds*, Michigan Math. J. **61** (2012), 531–542.

[24] T. Sasahara, *Legendre surfaces in Sasakian space forms whose mean curvature vectors are eigenvectors*, Publ. Math. Debrecen. **67** (2005), 285-303.

[25] T. Sasahara, *Biharmonic Lagrangian surfaces of constant mean curvature in complex space forms*, Glasgow Math. J. **49** (2007), 497-507.

[26] T. Sasahara, *Biminimal Legendrian surfaces in* 5*-dimensional Sasakian space forms,* Colloq. Math. **108** (2007), 297-304.

[27] T. Sasahara, *Biminimal Lagrangian H-umbilical submanifolds in complex space forms*, Geom. Dedicata. **160** (2012), 185-193.

[28] T. Sasahara, *Biharmonic submanifolds in nonflat Lorentz 3-space forms*, Bull. Austral. Math. Soc. **85** (2012), 422–432.

[29] T. Sasahara, *Surfaces in Euclidean* 3*-space whose normal bundles are tangentially biharmonic*, Arch. Math. **99** (2012), 281–287.

[30] T. Sasahara, *Quasi-biharmonic Lagrangian surfaces in Lorentzian complex space forms*, Ann. Mat. Pura Appl. **192** (2013), 191–201.

[31] T. Sasahara, *A class of biminimal Legendrian submanifolds in Sasakian space forms*, Math. Nachr. **287** (2014), 79–90.

[32] T. Sasahara, *Tangentially biharmonic Lagrangian H-umbilical submanifolds in complex space forms*, to appear in Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.

[33] T. Takahashi, *Sasakian manifolds with pseudo-Riemannian metric*, Tohoku Math. J. **21** (1969), 271-290.

[34] S. Tanno, *Sasakian manifolds with constant ϕ-holomorphic sectional curvature*, Tohoku Math. J. **21** (1969), 501-507.