

Hadamard 多様体上の Poisson 核と重心の幾何学*

佐藤 弘康†

概要

測度空間 M 上の正值確率測度の空間 $\mathcal{P}(M)$ には, Fisher 情報計量とよばれる Riemann 計量 G が定まり, 無限次元 Riemann 多様体の構造をもつ. 一方, Hadamard 多様体 X には理想境界とよばれるコンパクト多様体 ∂X が定まり, その上の正值確率測度の空間 $\mathcal{P}^+(\partial X)$ を考えることができる. 本研究の目標は, X の幾何構造から定まる 2 つの写像, Poisson 核写像 $\Theta: X \rightarrow \mathcal{P}^+(\partial X)$ と重心写像 $\text{bar}: \mathcal{P}^+(\partial X) \rightarrow X$ を通して, X の幾何を特徴づけることである. まず §1 で, Fisher 情報計量の幾何に関する T. Friedrich [7] の結果を紹介し, 新たに定義した確率測度の幾何平均の概念と, G の測地線の関係について述べる. §2 では, 後の節の準備として Hadamard 多様体の基本事項について述べる. §3 で, Poisson 核写像を定義し, 本研究の動機となる結果および問題について述べる. §4 では, ∂X 上の確率測度の重心の存在性・一意性を証明し, ファイバー空間としての性質について述べる.

1 正值確率測度の空間の幾何学

1.1 Fisher 情報計量

$M = (M, \mathfrak{A}, \lambda)$ を測度空間とし, λ に絶対連続な M 上の正值確率測度の全体

$$\mathcal{P}^+(M) = \left\{ \mu : \text{measure}, \int_M d\mu = 1, \mu \ll \lambda, \frac{d\mu}{d\lambda} > 0 \right\}$$

を考える. ここで, $\frac{d\mu}{d\lambda}$ は Radon-Nikodym 微分である. これを無限次元の多様体と見なすと*1, その上の接空間は

$$T_\mu \mathcal{P}^+(M) = \left\{ \tau : \text{signed measure}, \int_M d\tau = 0, \frac{d\tau}{d\mu} \in L^2(M, \mu) \right\}$$

となる. $T_\mu \mathcal{P}^+(M)$ の内積 G_μ を

$$G_\mu(\tau_1, \tau_2) := \int_M \frac{d\tau_1}{d\mu} \frac{d\tau_2}{d\mu} d\mu = \int_M \frac{q_1}{p} \frac{q_2}{p} p d\lambda$$

部分多様体幾何とリー群作用 2015 (2015 年 9 月 7 日, 8 日, 東京理科大学) 報告集原稿.

* 本研究は伊藤光弘氏 (筑波大学名誉教授) との共同研究に基づく.

† 日本工業大学工学部共通教育系 (E-mail: hiroyasu@nit.ac.jp)

*1 厳密に無限次元多様体の構造を考えるならば, 確率密度関数としてどのような関数空間の元を考えるか検討する必要があるが, ここではそれには触れずに形式的に議論することにする.

(ただし, $\mu = p\lambda \in \mathcal{P}^+(M)$, $\tau_1 = q_1\lambda$, $\tau_2 = q_2\lambda \in T_\mu\mathcal{P}^+(M)$) と定め, 写像 $\mu \mapsto G_\mu$ を $\mathcal{P}^+(M)$ 上の **Fisher 情報計量** とよぶ.

注意 1.1. $\xi \in \Xi \subset \mathbb{R}^n$ でパラメトライズされた確率分布の族

$$S = \{p_\xi = p(x; \xi) \mid \xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \Xi\}$$

を統計モデルとよぶ. $\xi \in \Xi$ における S の Fisher 情報行列 $g_\xi = (g_{ij}(\xi))$ は

$$g_{ij}(\xi) = \int \partial_i \log p_\xi \cdot \partial_j \log p_\xi \cdot p_\xi dx \quad \left(\partial_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \right)$$

で定義される [1]. Fisher 情報計量は Fisher 情報行列の自然な一般化である.

定理 1.2 ([7]). 無限次元 Riemann 多様体 $(\mathcal{P}^+(M), G)$ は次を満たす.

- (1) M 上の全単射な可測変換は, $(\mathcal{P}^+(M), G)$ に等長的に作用する.
- (2) G の Levi-Civita 接続は $\tau_1, \tau_2 \in T_\mu\mathcal{P}^+(M)$ に対し,

$$\nabla_{\tau_1}\tau_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\tau_1}{d\mu} \frac{d\tau_2}{d\mu} - G_\mu(\tau_1, \tau_2) \right) \mu$$

で与えられる. ただし, τ_2 を $\mathcal{P}^+(M)$ 上の定ベクトル場と見ている.

- (3) $(\mathcal{P}^+(M), G)$ は断面曲率 $\frac{1}{4}$ の定曲率空間である.
- (4) $\mu \in \mathcal{P}^+(M)$ と単位接ベクトル $\tau \in T_\mu\mathcal{P}^+(M)$ に対し, $\mu(0) = \mu$, $\mu'(0) = \tau$ を満たす測地線 $\mu(t)$ は

$$\mu(t) = \left(\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} \cdot \frac{d\tau}{d\mu} \right)^2 \mu \quad (1.1)$$

で与えられる.

定理 1.2 の (4) から, $(\mathcal{P}^+(M), G)$ は測地的に完備ではないことがわかる. 特に, $\mu(\pi) = \left(\frac{d\tau}{d\mu} \right)^2 \mu \notin \mathcal{P}^+(M)$ である.

1.2 L^2 -空間への埋め込み

写像 $\Phi: \mathcal{P}^+(M) \rightarrow L^2(M, \lambda)$; $\mu = p\lambda \mapsto 2\sqrt{p}$ によって, $\mathcal{P}^+(M)$ を M 上の L^2 -空間に埋め込む. $L^2(M, \lambda)$ 上の内積 $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_M f_1 f_2 d\lambda$ を, この写像によって引き戻すと, $\Phi^*\langle \cdot, \cdot \rangle = G$ となることがわかる. つまり, Φ は等長的な埋め込みとなる. これにより, $\mathcal{P}^+(M, \lambda)$ は $L^2(M, \lambda)$ 内の半径 2 の球面の「第 1 象限の部分」と解釈することができる.

この事実を M が有限集合 $M = \{x_1, x_2, x_3\}$ の場合で考える. M 上の正值確率測度の全体は

$$\mathcal{P}^+(M) = \{\mu = (p_1, p_2, p_3) \mid p_1 + p_2 + p_3 = 1, p_1, p_2, p_3 > 0\}$$

であり (図 1 左図), その接空間は

$$T_\mu \mathcal{P}^+(M) = \{\tau = (q_1, q_2, q_3) \mid q_1 + q_2 + q_3 = 0\}$$

である. $\tau_i = (q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}) \in T_\mu \mathcal{P}^+(M)$, $i = 1, 2$ に対し, Fisher 情報計量 G_μ は

$$G_\mu(\tau_1, \tau_2) = \sum_{j=1}^3 \frac{q_{1j}}{p_j} \cdot \frac{q_{2j}}{p_j} \cdot p_j = \sum_{j=1}^3 \frac{q_{1j} q_{2j}}{p_j}$$

で与えられる. 一方, $\mathcal{P}^+(M)$ 上の写像 $\Phi(p_1, p_2, p_3) = (2\sqrt{p_1}, 2\sqrt{p_2}, 2\sqrt{p_3})$ の微分写像は

$$\begin{aligned} d\Phi_\mu(\tau_i) &= \left. \frac{d}{dt} \Phi(\mu + t\tau_i) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (2\sqrt{p_1 + tq_{i1}}, 2\sqrt{p_2 + tq_{i2}}, 2\sqrt{p_3 + tq_{i3}}) \right|_{t=0} \\ &= \left(\frac{q_{i1}}{\sqrt{p_1}}, \frac{q_{i2}}{\sqrt{p_2}}, \frac{q_{i3}}{\sqrt{p_3}} \right) \end{aligned}$$

であるから, G_μ が \mathbb{R}^3 の標準内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いて,

$$G_\mu(\tau_1, \tau_2) = \langle d\Phi_\mu(\tau_1), d\Phi_\mu(\tau_2) \rangle$$

と表されることがわかる. これにより, $(\mathcal{P}^+(M), G)$ が \mathbb{R}^3 内の半径 2 の球面の第一象限の部分に等長的であることがわかる (図 1 右図).

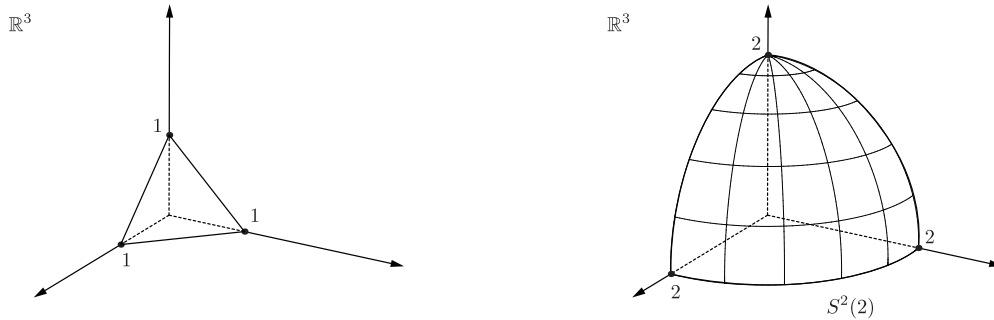


図 1 M が有限集合の場合の $\mathcal{P}^+(M)$ と Φ による像

1.3 幾何平均と測地線

本節では, 「 $\mathcal{P}^+(M)$ の任意の 2 点が Fisher 情報計量の測地線で結ぶことができる」という事実を, 確率測度の幾何平均の概念を用いて示す. まず, T. Friedrich による G の測地線の方程式を, 通過する 2 点の情報を用いて表すことを考える. そこで, $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}^+(M)$ に対し, この 2 点を結ぶ測地線 $\mu(t)$ が存在したとする. $\mu(0) = \mu_0$, $\mu(l) = \mu_1$, および $\mu'(0) = \tau$ とすると, 定理 1.2 (4) より,

$$\mu_1 = \mu(l) = \left(\cos \frac{l}{2} + \sin \frac{l}{2} \cdot \frac{d\tau}{d\mu_0} \right)^2 \mu_0$$

が成り立つ。仮定より, $t \in I = [0, l]$ において, $\mu(t) \in \mathcal{P}^+(M)$ だから, I 上で

$$p(t) := \cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} \cdot \frac{d\tau}{d\mu_0} > 0, \quad \text{または} \quad p(t) < 0$$

のいずれかが成り立っている。しかし, $p(0) = 1$ より, $p(t) < 0$ となることはあり得ない。したがって,

$$\cos \frac{l}{2} + \sin \frac{l}{2} \cdot \frac{d\tau}{d\mu_0} = \sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu_0}},$$

すなわち,

$$\tau = \frac{1}{\sin \frac{l}{2}} \left(\sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu_0}} - \cos \frac{l}{2} \right) \mu_0 \quad (1.2)$$

となる。 $\int d\tau = 0$ より, $\int \sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu_0}} d\mu_0 = \cos \frac{l}{2}$ となることがわかる。

定義 1.3. $\mu_0 = p_0 \lambda$, $\mu_1 = p_1 \lambda \in \mathcal{P}^+(M)$ とする。

(1) $l : \mathcal{P}^+(M) \times \mathcal{P}^+(M) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$l(\mu_0, \mu_1) = 2 \cos^{-1} \left(\int_M \sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu_0}} d\mu_0 \right) = 2 \cos^{-1} \left(\int_M \sqrt{p_1 p_0} d\lambda \right)$$

と定める。これは $\mathcal{P}^+(M)$ の距離関数を与える*2。

(2) $\sigma : \mathcal{P}^+(M) \times \mathcal{P}^+(M) \rightarrow \mathcal{P}^+(M)$ を

$$\sigma(\mu_0, \mu_1) := \frac{1}{\cos \frac{l(\mu_0, \mu_1)}{2}} \sqrt{\frac{d\mu_1}{d\mu_0}} \mu_0 = \frac{1}{\cos \frac{l(\mu_0, \mu_1)}{2}} \sqrt{p_0 p_1} \lambda \quad (1.3)$$

と定め, これを μ_0 と μ_1 の**正規化幾何平均測度**とよぶ。

正規化幾何平均と関数 l を用いると, (1.2) 式は

$$\tau = \mu'(0) = \frac{1}{\tan \frac{l}{2}} (\sigma(\mu_0, \mu_1) - \mu_0), \quad l = l(\mu_0, \mu_1) \quad (1.4)$$

と書ける。(1.4) を (1.1) に代入することにより, 次を得る。

定理 1.4. 2点 $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}^+(\partial X)$ を結ぶ測地線は

$$\mu(t) = a_0(t) \mu_0 + a_1(t) \mu_1 + a_2(t) \sigma(\mu_0, \mu_1), \quad (1.5)$$

と表される。ただし, $l = l(\mu_0, \mu_1)$ で,

$$a_0(t) = \left(\frac{\sin \frac{l-t}{2}}{\sin \frac{l}{2}} \right)^2, \quad a_1(t) = \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{l}{2}} \right)^2, \quad a_2(t) = 2 \cos \frac{l}{2} \left(\frac{\sin \frac{l-t}{2}}{\sin \frac{l}{2}} \right) \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{l}{2}} \right).$$

*2 T. Friedrich も [7] の中で言及している (証明は与えていない)。証明については [15] を参照。

逆に, 任意の $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}^+(M)$ に対し, (1.5) 式によって表される曲線は $(\mathcal{P}^+(M), G)$ の測地線の方程式を満たし, $\mu(0) = \mu_0, \mu(l) = \mu_1$ である (ただし, $l = l(\mu_0, \mu_1)$). また, 任意の $t \in [0, l]$ に対して, $a_i(t) \geq 0, i = 0, 1, 2$ であり, かつ $a_0(t) + a_1(t) + a_2(t) = 1$ であることが直接計算により確かめることができる. よって, $t \in [0, l]$ に対して $\mu(t) \in \mathcal{P}^+(M)$ であることがわかる. 以上のことから, 次を得る.

定理 1.5. $\mathcal{P}^+(M)$ の任意の 2 点は, G の測地線で結ぶことができる.

本節の最後に, 正規化幾何平均測度の幾何的な特徴について述べる. (1.4) は図 2 左図を意味している. 一方, $\mu(t)$ の逆向きの曲線 $\mu_-(t) = \mu(l - t)$ も測地線で, $\mu_-(0) = \mu_1, \mu_-(l) = \mu_0$ だから,

$$\mu'_-(0) = \frac{1}{\tan \frac{l}{2}} (\sigma(\mu_0, \mu_1) - \mu_1), \quad l = l(\mu_0, \mu_1)$$

が成り立つ (図 2 右図参照).

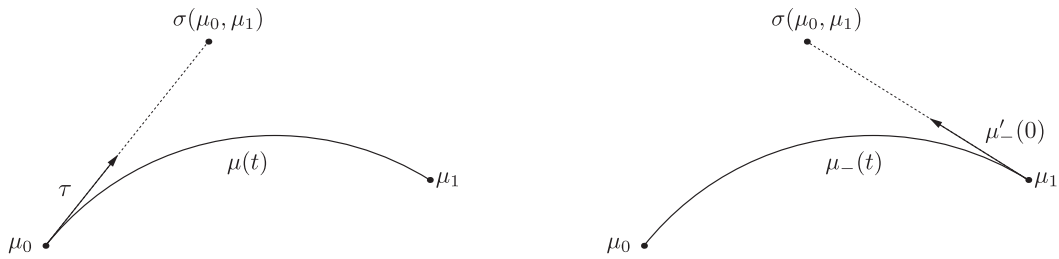


図 2 測地線の接ベクトルと正規化幾何平均

以上のことから, 正規化幾何平均 $\sigma(\mu_0, \mu_1)$ は次のように特徴付けられる.

定理 1.6. μ_0, μ_1 を通る測地線を $\mu(t)$ (ただし, $\mu_0 = \mu(0), \mu_1 = \mu(l)$) とし, μ_i における $\mu(t)$ の接線を L_i とする ($i = 0, 1$). つまり, L_0, L_1 は (符号付き測度を含む) 測度の空間上の曲線

$$L_0 : s \mapsto \mu(0) + s\mu'(0), \quad L_1 : s \mapsto \mu(l) + s\mu'(l)$$

である. このとき, L_0 と L_1 は $\mathcal{P}^+(M)$ 内で交点をもち, その交点が正規化幾何平均 $\sigma(\mu_0, \mu_1)$ である (図 3).

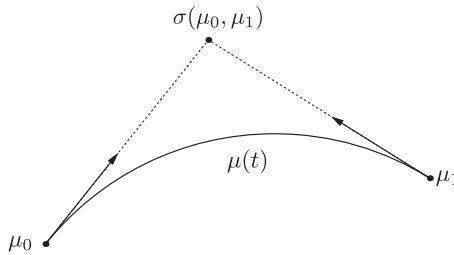


図 3 正規化幾何平均

2 Hadamard 多様体の基本事項

(X, g) を n 次元 Hadamard 多様体 (つまり, 単連結, 完備, 非正曲率 Riemann 多様体) とする. Cartan-Hadamard の定理より, X は \mathbb{R}^n と同相である. X 上の弧長パラメーターをもつ半開測地線の全体を同値関係「 $\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ は $t > 0$ で有界」によって類別した同値類全体の集合を X の**理想境界**とよび, ∂X と書く. ∂X は $(n-1)$ 次元球面に同相であり, 特に $X \cup \partial X$ が n 次元円板 D^n と同相となるような位相 (錐位相. [2] を参照) がはいる.

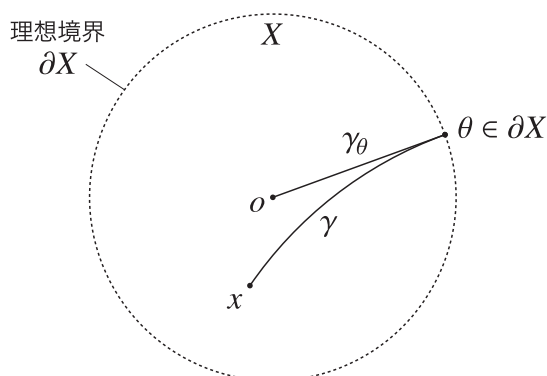


図4 Hadamard 多様体とその理想境界

測地線 γ に対して定まる X 上の関数 $B_\gamma(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \{d(\gamma(t), x) - t\}$ を **Busemann 関数** と言う. $\gamma_0 \sim \gamma$ ならば, $B_{\gamma_0}(x) - B_\gamma(x)$ が一定値 ($= B_{\gamma_0}(\gamma(0))$) であることから, Busemann 関数は理想境界上の点に対して定まる X 上の関数とみなすことができる. 実際, 基点 $o \in X$ を固定すると, $\theta \in \partial X$ に対し, $\gamma_\theta(0) = o, \gamma_\theta(\infty) = \theta$ を満たす測地線 γ_θ が唯一つ定まる. これによって, $B_\theta(x) = B_{\gamma_\theta}(x)$ と定める. B_θ を $o \in X$ で**正規化された Busemann 関数**とよぶ.

注意 2.1. $d(\gamma_\theta(t), o) = t$ であるから, $B_\theta(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (d(\gamma_\theta(t), x) - t)$ は形式的に $\text{Length}(\gamma) - \text{Length}(\gamma_o)$ と解釈することができる (図4を参照). つまり, $B_\theta(x)$ の値は「 o から θ までの距離」を原点としたときの, 「 x から θ までの距離」と解釈することができる.

補題 2.2 ([9, 22]). Busemann 関数は以下を満たす.

- (1) (X, g) の等長変換 φ に対し, $B_\theta(\varphi x) = B_{\varphi^{-1}\theta}(x) + B_\theta(\varphi o)$
- (2) B_θ は Lipschitz 連続である.
- (3) $\nabla B_\theta(x) = -\gamma'(0)$. ただし, $\gamma(t)$ は, $\gamma(0) = x, \gamma(\infty) = \theta$ を満たす測地線である (図5左). 特に, $|\nabla B_\theta|^2 = 1$ が成り立つ.
- (4) B_θ は凸関数である. つまり, 任意の測地線 γ と, $a \in [0, 1]$ に対して, $s < t$ ならば,

$$B_\theta \circ \gamma((1-a)s + at) \leq (1-a)B_\theta \circ \gamma(s) + aB_\theta \circ \gamma(t). \quad (2.1)$$

- (5) B_θ は C^2 -級である.
- (6) ヘッシアン は半正定値 $\nabla dB_\theta \geq 0$ である.

定義 2.3. B_θ の等位超曲面を, θ を中心とする**ホ口球面**とよぶ (図 5 左図を参照).

定義 2.4. Hadamard 多様体 (X, g) が「**可視公理**を満たす」とは, 理想境界上の任意の 2 点 θ_0, θ_1 が, X 上の測地線で結ぶことができるときをいう. つまり, $\gamma(\infty) = \theta_1, \gamma(-\infty) = \theta_0$ を満たす測地線 γ が存在するときをいう (図 5 右図参照). この条件は $\lim_{x \rightarrow \theta' \neq \theta} B_\theta(x) = \infty$ であることと同値である ([2] を参照).

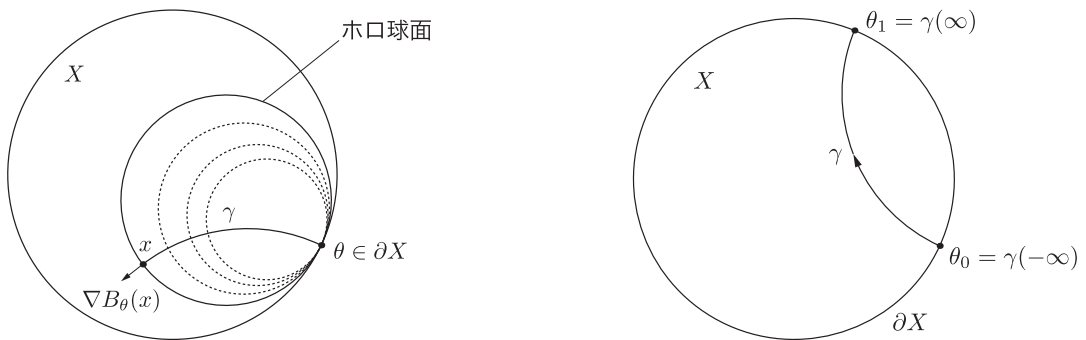


図 5 ホ口球面と可視公理

3 Poisson 核の情報幾何

3.1 Poisson 核

(X, g) を n 次元 Hadamard 多様体とする. $X \cup \partial X \simeq D^n$ であることから, 与えられた境界条件を満たす調和関数を求める問題 (無限遠 Dirichlet 問題) を考えることができる. つまり, $f \in C^0(\partial X)$ に対し,

$$u = f \text{ on } \partial X \quad \text{かつ} \quad \Delta u = 0 \text{ on } X \tag{3.1}$$

を満たす関数 u を求める問題である. この微分方程式の基本解 $P(x, \theta)$ を X 上の **Poisson 核** とよぶ. つまり, $f(\theta)$ と $P(x, \theta)$ の畳み込み

$$u(x) = \int_{\theta \in \partial X} f(\theta) P(x, \theta) d\lambda_0(\theta) \tag{3.2}$$

が (3.1) の解となるような関数である (任意の $\theta \in \partial X$ に対し, $P(o, \theta) = 1$ を満たすことも要請する^{*3}). ここで, λ_0 は X の基点 o を固定し, ∂X を接空間 $T_o X$ 内の原点を中心とする単位球

^{*3} (X, g) の曲率が負で有界のとき, Poisson 核はいくつかの条件を満たす $X \times \partial X$ 上の関数と特徴づけることができる ([23, p.43, Definition] を参照). $P(o, \theta) = 1$ はその条件の一つで, 定理 3.2 の証明には, この条件が必要である.

面と同一視したときの標準体積要素（確率測度）である。Poisson 核の代わりに、測度をこめて $\mu_x := P(x, \theta) \lambda_0$ を考えてもよい。これを**調和測度**とよぶ*4。

$X \cup \partial X$ 上 $u \equiv 1$ となる関数は、境界条件 $f \equiv 1$ に対する (3.1) の解である。これを (3.2) に代入することにより、調和測度は $\mathcal{P}^+(\partial X)$ の元であることがわかる。

3.2 Poisson 核写像

X が Poisson 核をもつとき、 $x \in X$ に対して、調和測度 $\mu_x = P(x, \theta) \lambda_0$ を対応させる写像 $\Theta : X \rightarrow \mathcal{P}^+(\partial X, \lambda_0)$ を定義することができる。この写像 Θ を X 上の **Poisson 核写像**とよぶ。

定理 3.1 ([11, 16]). (X, g) が n 次元 Damek-Ricci 空間のとき、 X 上の Poisson 核写像 Θ は相似写像である。特に、 $\Theta^*G = \frac{\rho^2}{n}g$ が成り立つ。ここで、 ρ は (X, g) の**体積エントロピー**

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \text{Vol}B(x; r)}{r}$$

である ($B(x; r)$ は x を中心とする半径 r の測地球)。また、 Θ は調和写像*5である。

Damek-Ricci 空間とは、H-type 群とよばれる冪零 Lie 群を 1 次元拡張した可解 Lie 群で、階数 1 非コンパクト型対称空間を含む Hadamard 多様体のクラスである（詳細は [3] を参照）。定理 3.1 の証明においては、Damek-Ricci 空間が等質空間であることと、Damek-Ricci 空間上の Poisson 核が Busemann 関数の指数関数として

$$P(x, \theta) = \exp \{-\rho B_\theta(x)\} \quad (3.3)$$

と表せることが本質的である。実際、次が成り立つ。

定理 3.2 ([12]). (X, g) が等質 Hadamard 多様体で、Poisson 核が

$$P(x, \theta) = \exp \{-c B_\theta(x)\} \quad (3.4)$$

と表されるならば、Poisson 核写像は相似的； $\Theta^*G = \frac{c^2}{n}g$ ，かつ調和的である。

Poisson 核が (3.4) 式で表されるとき、 (X, g) のホロ球面の平均曲率はすべて一定値 c をとる。このとき、 c が体積エントロピー ρ に等しいことがわかっている [13, Theorem 1.3]。したがって、Poisson 核は (3.3) の形で書ける。Poisson 核が (3.3) の形で表されるとき、「 (X, g) は **Busemann-Poisson 核をもつ**」という。

以上のことから、次のような問題が考えられる。

問題 3.3. (X, g) 上の Poisson 核写像が相似的かつ調和的な空間は Damek-Ricci 空間に限るのか。

*4 任意の Hadamard 多様体において、Poisson 核が存在するとは限らない。曲率が真に負で有界ならば、Poisson 核（調和測度）が存在することがわかっている。詳細は [23, Chap. II] を参照。

*5 Θ がエネルギー汎関数 $\phi \mapsto \frac{1}{2} \int_X \text{tr}_g(\phi^*G) dv_g$ の臨界点である。

3.3 関連する話題（漸近的調和多様体と調和多様体）

定理 3.2 より, (X, g) 上の Poisson 核写像が相似的かつ調和的ならば, (X, g) は Busemann-Poisson 核をもつ. さらに, この性質から (X, g) は漸近的調和多様体, かつ可視公理*6 を満たすことが示される. ここで,

定義 3.4. (X, g) を完備 Riemann 多様体とする. このとき,

- (1) X が共役点を持たず, すべてのホロ球面が平均曲率一定かつ共通値をとるとき, X を**漸近的調和多様体**とよぶ. 一方,
- (2) すべての測地球面が平均曲率一定で, その値が半径のみに依存するとき, **調和多様体**とよぶ.

Hadamard 多様体のホロ球面は, 測地球面の半径を限りなく大きくした極限として得られる. よって, 調和多様体ならば漸近的調和だが, 逆は一般には成り立たない. 調和多様体および漸近的調和多様体の非自明な例は, Damek-Ricci 空間のみ知られており, 問題 3.3 は漸近的調和多様体の分類問題とも関連している.

調和多様体の分類問題については, A. Lichnerowicz [19] による予想「調和多様体は階数 1 対称空間かユークリッド空間に限る」に端を発する. Z. Szabó [24] は, 空間がコンパクトで単連結の場合には, この予想が正しいことを証明した. しかし, E. Damek と F. Ricci [5] は, 非コンパクトで等質な調和多様体の例 (Damek-Ricci 空間) を構成し, Lichnerowicz 予想が非コンパクトの場合に正しくないことを示した. 一方, G. Besson ら [4] により, 負曲率でコンパクト商をもつ調和多様体は, 階数 1 非コンパクト型対称空間に限ることが示され, A. Ranjan と H. Shah [21] は, 非コンパクトで polynomial volume growth をもつ調和多様体は Euclid 空間に限ることを示した. さらに, J. Heber [8] は等質な調和多様体は階数 1 対称空間か, ユークリッド空間か, または Damek-Ricci 空間に限ることを示した. このことから, まだ明らかになっていないのは「非コンパクト, 非等質で, purely exponential volume growth をもつ」調和多様体である. このような空間については以下のことがわかっている.

定理 3.5 ([17]). X を単連結な非コンパクト調和多様体とする. このとき, 次は同値である.

- (i) X は Gromov-双曲的である.
- (ii) X は polynomial volume growth をもつ.
- (iii) X は階数 1 である.
- (iv) X はアノソフ測地流をもつ.

一方, 漸近的調和多様体については, 非コンパクト, 単連結, 等質な漸近的調和かつ Einstein で

*6 Poisson 核は無限遠 Dirichlet 問題の基本解であるから, x を理想境界の点に近づけると, 調和測度は Dirac 測度に近づくので, $\lim_{x \rightarrow \theta' \neq \theta} P(x, \theta) = 0$ が成り立つ. したがって, $\lim_{x \rightarrow \theta' \neq \theta} B_\theta(x) = -\frac{1}{\rho} \lim_{x \rightarrow \theta' \neq \theta} \log P(x, \theta) = \infty$ となり, X は可視公理を満たす.

あるような空間は、Euclid 空間か、階数 1 対称空間か、Damek-Ricci 空間のいずれかに限ることがわかっている [8]. さらに、定理 3.5 と類似の次の結果が得られている.

定理 3.6 ([18]). (X, g) を漸近的調和多様体で、その曲率テンソル R は $|R| \leq R_0$ かつ $|\nabla R| \leq R'_0$ (ただし、 $R_0, R'_0 > 0$) を満たすとする. このとき、定理 3.5 における 4 つの条件 (i) ~ (iv) は互いに同値である.

4 重心写像

前節で述べた問題 3.3 を考える際の道具のひとつと考えているのが確率測度の重心 (重心写像) の概念である. 重心に関する既知の結果としては、例えば、E. Douady と C. Earle [6] は、円周 S^1 の同相変換を円板 D 内の同相変換に拡張する際に重心写像を用いている. また、G. Besson ら [4] は階数 1 非コンパクト型対称空間の剛性定理^{*7}の証明において、ホモトピー同値写像 $f: Y \rightarrow X$ から得られる理想境界間の写像 $\bar{f}: \partial\tilde{Y} \rightarrow \partial\tilde{X}$ と、重心写像を用いて、等長写像 $F: \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$ を構成した.

本節では、重心の存在性・一意性を証明し、ファイバー空間としての性質について述べる.

4.1 確率測度の重心

(X, g) を Hadamard 多様体とし、 B_θ を $o \in X$ で正規化された Busemann 関数とする. 確率測度 μ に対し、関数 $\mathbb{B}_\mu: X \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\mathbb{B}_\mu(x) = \int_{\theta \in \partial X} B_\theta(x) d\mu(\theta)$$

と定義し^{*8}、この関数の臨界点を μ の**重心**とよぶ. つまり、 x が μ の重心であるとは、任意の $V \in T_x X$ に対して、

$$\int_{\theta \in \partial X} \langle \nabla B_\theta(x), V \rangle d\mu(\theta) = 0 \quad (4.1)$$

が成り立つことである.

注意 4.1. (X, g) が Busemann-Poisson 核をもつとき、調和測度 $\mu_x := \Theta(x) = \exp\{-\rho B_\theta(x)\} \lambda_0$ の重心は x である. なぜなら、任意の $x \in X$ に対して、

$$\int_{\theta \in \partial X} \exp\{-\rho B_\theta(x)\} d\lambda_0(\theta) = 1$$

であるから、この式を $V \in T_x X$ で微分すれば、

$$0 = -\rho \int_{\theta \in \partial X} V B_\theta(x) \exp\{-\rho B_\theta(x)\} d\lambda_0(\theta) = -\rho \int_{\theta \in \partial X} \langle \nabla B_\theta(x), V \rangle d\mu_x(\theta)$$

^{*7} 「 (X, g_0) と (Y, g) はいずれも同じタイプのコンパクト負曲率局所対称空間で $\dim X = \dim Y > 3$ とする. このとき、 $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$ ならば、 (X, g_0) と (Y, g) は計量を適当に定数倍すれば等長的である.」

^{*8} \mathbb{B}_μ は連続関数である. 特に、Busemann 関数の Lipschitz 連続性より、 \mathbb{B}_μ も Lipschitz 連続となる.

となり, これは任意の $x \in X$ と任意の $V \in T_x X$ で成り立つ.

重心の存在性と一意性は次の定理で与えられる.

定理 4.2 (重心の存在性). μ を ∂X 上の原子^{*9}をもたない確率測度^{*10}とする. このとき, (X, g) が可視公理を満たし, さらに,

$$\text{任意の } x \in X \text{ に対して, } \partial X \text{ 上の関数 } \theta \mapsto B_\theta(x) \text{ が連続} \quad (4.2)$$

ならば, μ の重心が存在する.

この定理の証明は, 次節で述べる.

定理 4.3 (重心の一意性). 確率測度 μ は重心を持つとする. このとき, X 上の 2 形式 $\nabla d\mathbb{B}_\mu = \int_{\theta \in \partial X} \nabla dB_\theta(\cdot, \cdot) d\mu(\theta)$ が正定値であれば, μ の重心は唯一つである.

証明. 異なる 2 点 $x, y \in X$ が μ の重心であるとする. つまり, $\nabla \mathbb{B}_\mu(x) = \nabla \mathbb{B}_\mu(y) = 0$ が成り立つ. x と y を結ぶ測地線を γ とし, $\gamma(0) = x, \gamma(s) = y$ とする. 仮定 $\nabla d\mathbb{B}_\mu > 0$ より, $\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{B}_\mu(\gamma(t)) > 0$ である. しかし, このとき, $\left. \frac{d}{dt} \mathbb{B}_\mu(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \mathbb{B}_\mu(\gamma(t)) \right|_{t=s} = 0$ となることはなく矛盾する. \square

系 4.4. Hadamard 多様体 (X, g) が可視公理を満たし, 条件 (4.2) を満たすとする. このとき, $\nabla d\mathbb{B}_\mu$ が正定値となるような $\mu_0 \in \mathcal{P}^+(\partial X)$ が少なくとも 1 つ存在すれば, 任意の $\mu \in \mathcal{P}^+(\partial X)$ に対してその重心はただ 1 つ定まる.

証明. $\mu_0 \in \mathcal{P}^+(\partial X)$ に対し, $\nabla d\mathbb{B}_{\mu_0} > 0$ と仮定する. $\mu \in \mathcal{P}^+(\partial X)$ に対し, ∂X はコンパクトなので, $\frac{d\mu}{d\mu_0}$ は最小値 $m > 0$ をもつ. このとき,

$$\nabla d\mathbb{B}_\mu = \int_{\theta \in \partial X} \nabla dB_\theta(\cdot, \cdot) \frac{d\mu}{d\mu_0}(\theta) d\mu_0(\theta) \geq m \nabla d\mathbb{B}_{\mu_0} > 0$$

を得る. よって, 任意の $\mu \in \mathcal{P}^+(\partial X)$ に対して, 重心が存在すれば, 唯一つである. \square

注意 4.5. Hadamard 多様体 (X, g) が Busemann-Poisson 核をもち, 条件 (4.2) を満たすとき, 調和測度 μ_x に対して,

$$\nabla d\mathbb{B}_{\mu_x} = \frac{1}{\rho^2} \Theta^* G_{\mu_x} = \rho G_{\mu_x}(\nu_\mu^x(\cdot), \nu_\mu^x(\cdot)) > 0$$

であるから, 系 4.4 より, 任意の $\mu \in \mathcal{P}^+(\partial X)$ に対してその重心はただ 1 つ定まる.

^{*9} 可測集合 $A \subset \partial X$ が確率測度 μ の原子であるとは, $B \subset A$ かつ $\mu(B) < \mu(A)$ を満たす任意の可測集合 B に対して, $\mu(B) = 0$ となることである.

^{*10} $\frac{d\mu}{d\lambda_0}(\theta) = 0$ となる点 $\theta \in \partial X$ があってもよい.

(X, g) が系 4.4 の仮定を満たすとき, $\mu \in \mathcal{P}^+(\partial X)$ に対してその重心を対応させる写像を**重心写像**とよび, bar と書く.

4.2 重心の存在性 (定理 4.2 の証明)

定数 $C > 0$ に対して定まる X の閉部分集合

$$A_C := \{x \in X \mid \mathbb{B}_\mu(x) \leq C\}$$

が有界集合であることが示されれば, A_C はコンパクト集合となり, \mathbb{B}_μ の最小値 (つまり臨界点) の存在性が保証される. ここで, 基点 $o \in X$ に対し, $\mathbb{B}_\mu(o) = 0 \leq C$ より, A_C は空集合ではない.

そのために, $\gamma(0) = o$ を満たす任意の測地線 γ に対して,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{B}_\mu(\gamma(t)) = \infty \quad (4.3)$$

であることを示す. 仮に, 任意の $t \geq T > 0$ に対して $\mathbb{B}_\mu(\gamma(t)) \leq C$ を満たす γ が存在すれば, $\gamma(t) \in A_C$ となり, A_C は有界集合とはならない.

以後, X の測地線 γ は $\gamma(0) = o$ を満たすとする. さらに, $\theta \in \partial X$ に収束する測地線を γ_θ と書く. また, Busemann 関数 $B_\theta(x)$ は o で正規化されているとする.

補題 4.6. $0 \leq t_1 < t$ ならば, $t B_\theta(\gamma(t_1)) \leq t_1 B_\theta(\gamma(t))$ が成り立つ.

証明. Buseman 関数の凸性 (補題 2.2 (4)) を用いる. (2.1) に, $s_1 = 0, s_2 = t, a = \frac{t_1}{t}$ を代入することにより

$$B_\theta(\gamma(t_1)) \leq \left(1 - \frac{t_1}{t}\right) B_\theta(\gamma(0)) + \frac{t_1}{t} B_\theta(\gamma(t)) = \frac{t_1}{t} B_\theta(\gamma(t)).$$

を得る. □

$\theta \in \partial X$ と $t \geq 0$ に対して

$$J_\theta(t) := \{\xi \in \partial X \mid B_\xi(\gamma_\theta(t)) \leq 0\}$$

とおく. $B_\theta(\gamma_\theta(t)) = 0$ より, $\theta \in J_\theta(t)$ であるから, $J_\theta(t) \neq \emptyset$ である. 条件 (4.2) より, $J_\theta(t)$ は閉集合である. また, ∂X はコンパクトなので, $J_\theta(t)$ もコンパクトである.

補題 4.7. $0 \leq t_1 < t$ ならば, $J_\theta(t) \subset J_\theta(t_1)$ である.

証明. 補題 4.6 より, $B_\xi(\gamma_\theta(t_1)) \leq \frac{t_1}{t} B_\xi(\gamma_\theta(t))$. したがって, $\xi \in J_\theta(t)$ ならば,

$$B_\xi(\gamma_\theta(t_1)) \leq \frac{t_1}{t} B_\xi(\gamma_\theta(t)) \leq 0.$$

よって, $\xi \in J_\theta(t_1)$ を得る. □

補題 4.8. $\bigcap_{t \in [0, \infty)} J_\theta(t) = \{\theta\}$.

証明. θ と異なる $\xi \in \bigcap_{t \in [0, \infty)} J_\theta(t)$ が存在したとする. このとき, 任意の $t \in [0, \infty)$ に対し, $B_\xi(\gamma_\theta(t)) \leq 0$ が成り立つ. しかし, これは, 可視公理の同値条件

$$\lim_{x \rightarrow \theta} B_\xi(x) = \infty$$

と矛盾する. □

補題 4.9. 原子を持たない確率測度 μ と $\theta_1 \in \partial X$ に対して, $\mu(J_{\theta_1}(t_1)) < 1$ となる $t_1 \in (0, \infty)$ が存在する.

証明. 補題 4.7 より, $\mu(J_{\theta_1}(t))$ は減少関数である. 補題 4.8 より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(J_{\theta_1}(t)) = \mu\left(\bigcap_{t \in [0, \infty)} J_{\theta_1}(t)\right) = \mu(\{\theta_1\}) = 0$$

となるから, $\mu(J_{\theta_1}(t_1)) < 1$ となる t_1 が存在する. □

$\theta_1 \in \partial X$ と補題 4.9 を満たす $t_1 > 0$ に対し, $K \subset \partial X \setminus J_{\theta_1}(t_1)$ をコンパクトかつ $\mu(K) > 0$ を満たす集合とする. すると, 任意の $\theta \in K$ に対して, $B_\theta(\gamma_{\theta_1}(t_1)) \geq C$ を満たす $C > 0$ が存在する. また, 補題 4.7 より, $t_1 < t$ ならば, $K \subset \partial X \setminus J_{\theta_1}(t)$ である. 任意の $\theta \in \partial X \setminus J_{\theta_1}(t)$ に対して, $B_\theta(\gamma_{\theta_1}(t)) > 0$ であるから, $t_1 < t$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_\mu(\gamma_{\theta_1}(t)) &= \int_{\partial X} B_\theta(\gamma_{\theta_1}(t)) d\mu(\theta) \\ &= \int_{J_{\theta_1}(t)} B_\theta(\gamma_{\theta_1}(t)) d\mu(\theta) + \int_{\partial X \setminus J_{\theta_1}(t)} B_\theta(\gamma_{\theta_1}(t)) d\mu(\theta) \\ &\geq \int_{J_{\theta_1}(t)} B_\theta(\gamma_{\theta_1}(t)) d\mu(\theta) + \int_K B_\theta(\gamma_{\theta_1}(t)) d\mu(\theta) \\ &\geq \frac{t}{t_1} \int_{J_{\theta_1}(t)} B_\theta(\gamma_{\theta_1}(t_1)) d\mu(\theta) + \frac{t}{t_1} \int_K B_\theta(\gamma_{\theta_1}(t_1)) d\mu(\theta) \quad (\because \text{補題 4.6}) \\ &\geq \frac{t}{t_1} \int_{J_{\theta_1}(t)} B_\theta(\gamma_{\theta_1}(t_1)) d\mu(\theta) + \frac{t}{t_1} \cdot C \cdot \mu(K) \end{aligned}$$

が成り立つ. 上式右辺の第 1 項を評価するために, $D := \sup\{|B_\theta(\gamma_{\theta_1}(t_1))|; \theta \in \partial X\}$ とおく. ∂X はコンパクトで, (4.2) より, D の値は有界である. よって,

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_\mu(\gamma(t)) &\geq -\frac{t}{t_1} \cdot D \cdot \mu(J_{\theta_1}(t)) + \frac{t}{t_1} \cdot C \cdot \mu(K) \\ &= \frac{t}{t_1} (C \cdot \mu(K) - D \cdot \mu(J_{\theta_1}(t))) \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

を得る (上の第 2 項が 0 に収束することは, 補題 4.9 の証明を参照).

4.3 接空間の分解

(X, g) を Busemann-Poisson 核をもち, (4.2) を満たす Hadamard 多様体とする. 注意 4.1 より, $\text{bar} \circ \Theta = \text{id}_X$ が成り立つので, bar は全射である. $\text{bar} : \mathcal{P}^+(\partial X) \rightarrow X$ をファイバー空間と見ると, Poisson 核写像 Θ は bar の切断である. ここでは, 接空間の水平方向と垂直方向の分解について述べる.

補題 4.10. $\text{bar}(\mu) = x$ とする. このとき, $\tau \in T_\mu \text{bar}^{-1}(x) \subset T_\mu \mathcal{P}^+(\partial X)$ であるための必要十分条件は, 任意の $V \in T_x X$ に対して,

$$\int_{\theta \in \partial X} \langle \nabla B_\theta(x), V \rangle d\tau(\theta) = 0 \quad (4.4)$$

が成り立つことである.

証明. $\mu(t)$ を $\text{bar}^{-1}(x) \subset \mathcal{P}^+(\partial X)$ 内の曲線で, $\mu(0) = \mu, \mu'(0) = \tau$ を満たすとする. すると, 任意の $V \in T_x X$ に対し,

$$\int_{\partial X} \langle \nabla B_\theta(x), V \rangle d(\mu(t))(\theta) = 0$$

が成り立つ. この式を t で微分して, $t=0$ を代入することにより, (4.4) を得る. 逆に, $\text{bar}(\mu) = x$ を満たす $\mu \in \mathcal{P}^+(\partial X)$ と, 任意の $V \in T_x X$ に対して (4.4) を満たす $\tau \in T_\mu \mathcal{P}^+(\partial X)$ に対して, $\mu(t) = \mu + t\tau$ とおけば, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して, $\text{bar}(\mu(t)) = x$ であることが直ちにわかる. よって, $\mu'(0) = \tau \in T_\mu \text{bar}^{-1}(x)$ となる. \square

4.4 式を計量 G を用いて表すため, 次の写像 ν を定義する. $V \in T_x X$ に対し,

$$\nu_x^\mu(V) := \langle \nabla B_\theta(x), V \rangle \mu$$

とおくと, (4.1) より, $\text{bar}(\mu) = x$ ならば, $\nu_x^\mu : T_x X \rightarrow T_\mu \mathcal{P}^+(\partial X)$ である. (4.4) の右辺は,

$$\int_{\theta \in \partial X} \langle \nabla B_\theta(x), V \rangle d\tau(\theta) = \int_{\theta \in \partial X} \frac{d(\nu_x^\mu(V))}{d\mu} \frac{d\tau}{d\mu} d\mu(\theta) = G_\mu(\nu_x^\mu(V), \tau) \quad (4.5)$$

と変形できるので, (4.4) より, 接空間の直交分解

$$T_\mu \mathcal{P}^+(\partial X) = T_\mu \text{bar}^{-1}(x) \oplus \text{Im}(\nu_x^\mu)$$

が得られる^{*11} (ただし, $\text{bar}(\mu) = x$).

この分解から, $\tau \in T_\mu \mathcal{P}^+(\partial X)$ はファイバーに沿う成分と $\text{Im}(\nu_x^\mu)$ 方向の成分に分解することができる. τ の $\text{Im}(\nu_x^\mu)$ 方向の成分を $\nu_x^\mu(V_\tau)$ とおくと, $V_\tau = \sum_{i=1}^n G_\mu(\tau, \nu_x^\mu(e_i)) e_i$ である. ただし, $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ は $T_x X$ の内積

$$G_\mu(\nu_x^\mu(\cdot), \nu_x^\mu(\cdot)) = \int_{\theta \in \partial X} \langle \nabla B_\theta(x), \cdot \rangle \langle \nabla B_\theta(x), \cdot \rangle d\mu(\theta)$$

^{*11} (4.5) は μ に依っているが, (4.4) は μ に依らない式であることに注意.

に関する正規直交基底である.

4.4 ファイバーの凸性

ファイバー $\text{bar}^{-1}(x) \subset \mathcal{P}^+(\partial X)$ は次の意味で凸集合である; $\mu_0, \mu_1 \in \text{bar}^{-1}(x)$ ならば, $s \in [0, 1]$ に対して $(1-s)\mu_0 + s\mu_1 \in \text{bar}^{-1}(x)$ である. 測地的な凸性については, 以下が成り立つ.

定理 4.11. 2点 $\mu_0, \mu_1 \in \text{bar}^{-1}(x)$ を結ぶ測地線 $\mu(t)$ がファイバー $\text{bar}^{-1}(x)$ に含まれるための必要十分条件は, それらの正規化幾何平均が $\sigma(\mu_0, \mu_1) \in \text{bar}^{-1}(x)$ となることである.

証明. 定理 1.4 から直ちに得られる. □

定理 4.12. $\mu(0) = \mu \in \text{bar}^{-1}(x)$, $\mu'(0) = \tau \in T_\mu \text{bar}^{-1}(x)$, $G_\mu(\tau, \tau) = 1$ を満たす測地線 $\mu(t)$ が, ファイバー $\text{bar}^{-1}(x)$ に含まれるための必要十分条件は, 任意の $V \in T_x X$ に対し,

$$\int_{\partial X} \langle \nabla B_\theta(x), V \rangle \left(\frac{d\tau}{d\mu} \right)^2 d\mu = 0 \quad (4.6)$$

が成り立つことである.

証明. 仮定から, 任意の $V \in T_x X$ に対し, $\int_{\partial X} \langle \nabla B_\theta(x), V \rangle d(\mu(t)) = 0$ が成り立つ. $\mu(t)$ は (1.1) の形で書けるので, これを代入することにより,

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{t}{2} \int \langle \nabla B_\theta(x), V \rangle d\mu + 2 \cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} \int \langle \nabla B_\theta(x), V \rangle d\tau \\ + \sin^2 \frac{t}{2} \int \langle \nabla B_\theta(x), V \rangle \left(\frac{d\tau}{d\mu} \right)^2 d\mu = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

を得る. (4.7) の左辺第 1 項は仮定 $\text{bar}(\mu) = x$ から, 第 2 項は仮定 $\tau \in T_\mu \text{bar}^{-1}(x)$ から消えることがわかる. よって, (4.6) を得る. □

条件 (4.6) 式は, 次のような 2 つの解釈が可能である. (4.6) の左辺は, $G_\mu(\nabla_\tau \tau, \nu_x^\mu(V))$ と書けるので, (4.6) は部分空間 $\text{bar}^{-1}(x) \subset \mathcal{P}^+(\partial X)$ の第 2 基本形式に関する条件: $H_\mu(\tau, \tau) = 0$ を意味する. 一方, $\tau \in T_\mu \mathcal{P}^+(\partial X)$ は単位ベクトルなので, $\mu_\tau := \left(\frac{d\tau}{d\mu} \right)^2 \mu$ は確率測度となる. よって, (4.6) は, 「 μ_τ の重心が x である」ことを意味する.

問題 4.13. $\mu \in \mathcal{P}^+(\partial X)$ に対し, $\text{bar}(\mu_\tau) = \text{bar}(\mu)$ を満たす $\tau \in T_\mu \mathcal{P}^+(\partial X)$ (ただし, $G_\mu(\tau, \tau) = 1$) はどのくらい存在するだろうか.

参考文献

- [1] S.-I. Amari and H. Nagaoka, *Methods of information geometry*, Transl. Math. Monogr. **191**, AMS, AMS, Providence, RI; Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [2] W. Ballmann, M. Gromov, M. and S. Viktor, *Manifolds of nonpositive curvature*, Progr. Math. **61**, Birkhäuser, Boston, MA, 1985.
- [3] J. Berndt, F. Tricerri and L. Vanhecke, *Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces*, Lecture Notes in Math. **1598**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [4] G. Besson, G. Courtois and S. Gallot, *Entropes et Rigidités des Espaces Localement Symétriques de Courbure Strictement Négative*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), 731-799.
- [5] E. Damek and F. Ricci, *A class of nonsymmetric harmonic Riemannian spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **27** (1992), no. 1, 139-142.
- [6] E. Douady and C. Earle, *Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle*, Acta Math. **157** (1986), 23-48.
- [7] T. Friedrich, *Die Fisher-Information und symplektische Strukturen*. Math. Nach. **153** (1991), 273-296.
- [8] J. Heber, *On harmonic and asymptotically harmonic homogeneous spaces*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 869-890.
- [9] E. Heintze and H.C. Im Hof, *Geometry of Horospheres*, J. Diff. Geom. **12** (1977), 481-491.
- [10] 伊藤光弘, 重心写像の Fisher 情報幾何, 連続講演記録, 東京理科大学 (2015).
- [11] M. Itoh and H. Satoh, *Information geometry of Poisson kernels on Damek-Ricci spaces*, Tokyo J. Math. **33** (2010), 129-144.
- [12] M. Itoh and H. Satoh, *Fisher information geometry, Poisson kernel and asymptotical harmonicity*, Differential Geom. Appl. **29** (2011), S107-S115.
- [13] M. Itoh, H. Satoh and Y.J. Suh, *Horospheres and hyperbolicity of Hadamard manifolds*, Differential Geom. Appl. **35** (2014), 50-68.
- [14] M. Itoh and H. Satoh, *Geometry of Fisher information metric and the barycenter map*, Entropy **17** (2015), 1814-1849.
- [15] M. Itoh and H. Satoh, *Geometric mean of probability measures and geodesics for Fisher information metric*, in preparation.
- [16] M. Itoh and Y. Shishido, *Fisher information metric and Poisson kernels*, Differential Geom. Appl. **26** (2008), 347-356
- [17] G. Knieper, *New results on noncompact harmonic manifolds*, Comment. Math. Helv. **87** (2012), 669-703.
- [18] G. Knieper and N. Peyerimhoff, *Noncompact asymptotically harmonic manifolds*, arXiv:1307.0629v2.

- [19] A. Lichnerowicz, *Sur les espaces riemanniens complèment harmoniques*, Bull. Soc. Math. France **72** (1944), 146-168.
- [20] A. Ohara, *Geodesics for dual connections and means on symmetric cones*, Integr. Equ. Oper. Theory **50** (2004), 537-548.
- [21] A. Ranjan and H. Shah, *Harmonic manifolds with minimal horospheres*, J. Geom. Anal. **12** (2002), no. 4, 683-694.
- [22] 酒井 隆, リーマン幾何学, 数学選書 11, 裳華房, 1992.
- [23] R. Schoen and S.-T. Yau, *Lectures on Differential Geometry*, Intern. Press, Boston, 1994.
- [24] Z.I. Szabó, *The Lichnerowicz Conjecture on Harmonic manifolds*, J. Differential Geom. **31** (1990), no. 1, 1-28.